1. 10 의 약수의 집합을 A 라고 할 때, 다음 중 옳지 <u>않은</u> 것을 모두 고르면? (정답 2 개)

① $1 \in A$ ② $3 \in A$ ③ $4 \notin A$ ④ $5 \in A$ ⑤ $6 \in A$

해설

집합 A 의 원소는 1, 2, 5, 10 이므로 3, 4, 6 은 집합 A 의 원소가 아니다. 따라서

② $3 \notin A$

⑤ $6 \notin A$ 이다.

2. 집합 $X = \{a, b, c, d, e, f\}$의 부분집합 중에서 $\{a, c, f\}$와 서로소인 집합의 개수는?

① 1개 ② 2개 ③ 4개 ④ 8개 ⑤ 16개

해설

$2^{6-3} = 2^3 = 8$(개)

3. $A=\{1, 2, a+1\}$, $B=\{a-1, 5\}$ 에 대하여 $A \cap B=\{5\}$ 일 때, $A-B$ 는?

① $\varnothing$ ② $\{1, 2\}$ ③ $\{1, 3\}$ ④ $\{3, 5\}$ ⑤ $\{5\}$

해설

$A \cap B=\{5\}$ 이므로 $a+1=5, a=4$ 이다.
따라서 $A=\{1, 2, 5\}$, $B=\{3, 5\}$ 이므로 $A-B=\{1, 2\}$ 이다.

4. 함수 $y = \dfrac{bx-3}{x-a}$의 정의역은 $x \neq 4$인 모든 실수이고 치역은 $y \neq 2$인 모든 실수이다. 이때, $a+b$의 값은?

① 2　　② 4　　③ 6　　④ 8　　⑤ 10

해설

정의역은 $x \neq 4$인 모든 실수이고 치역은 $y \neq 2$인 모든 실수이므로,

$a=4,\ b=2$이다.

$\therefore a+b=4+2=6$

5. 집합 $A = \{0,\ 1,\ 2,\ 3\}$ 의 부분집합 중 원소의 개수가 2 개인 부분집합의 개수를 구하여라.

▶ 답 : ______ 개

▷ 정답 : 6 개

해설

구하고자 하는 부분집합은, $\{0, 1\}$, $\{0, 2\}$, $\{0, 3\}$, $\{1, 2\}$, $\{1, 3\}$, $\{2, 3\}$ 이다.

6. 다음 중 옳지 <u>않은</u> 것을 모두 고르면? (정답 3개)

① $A=\varnothing$이면 $n(A)=0$이다.

② $B \subset A$이면 $n(B) < n(A)$이다.

③ $\mathrm{A}=\mathrm{B}$이면 $n(A)=n(B)$이다.

④ $n(A)=n(B)$이면 $A=B$이다.

⑤ $A=\{0\}$이면 $n(A)=0$이다.

해설

② $B \subset A$이면 $n(B) \le n(A)$

④ 예를 들면 $A=\{0\}$, $B=\{1\}$이면 $n(A)=n(B)=1$이지만 $A \ne B$

⑤ $A=\{0\}$이면 $n(A)=1$

7. 집합 $A = \{x \mid x$는 3보다 크고, 9보다 작은 짝수$\}$의 부분집합의 개수를 구하여라.

▶ 답 : ______ 개

▷ 정답 : 8 개

해설

$A = \{4,\ 6,\ 8\}$ 이므로 부분집합의 개수는 원소의 개수만큼 2를 곱한 값과 같으므로
$2^3 = 2 \times 2 \times 2 = 8$ (개)이다.

8. 집합 $A=\{x \mid x$는 9보다 작은 홀수$\}$ 의 부분집합 중에서 원소 1 또는 5 를 포함하는 부분집합의 개수를 구하여라.

▶ 답 : ______ 개

▷ 정답 : 12 개

해설

$A=\{1,\ 3,\ 5,\ 7\}$

원소 1 을 포함하는 부분집합의 개수 :

$2^{4-1}=8$ (개)

원소 5 를 포함하는 부분집합의 개수 :

$2^{4-1}=8$ (개)

원소 1, 5 를 포함하는 부분집합의 개수 :

$2^{4-2}=4$ (개)

원소 1 또는 5 를 포함하는 부분집합의 개수 :

$8+8-4=12$ (개)

9. 두 집합 $A = \{a-1, a+2, 4\}, B = \{b-3, b+1, 5\}$ 에 대하여 $A \cap B = \{4, 5, c\}$ 일 때, $a+b+c$ 의 값을 구하여라. (단, $c \neq 4, c \neq 5$)

▶ 답 :

▷ 정답 : 21

해설

$A \cap B = \{4, 5, c\}$ 이므로 $\{4, 5, c\} \subset \{a-1, a+2, 4\}, \{4, 5, c\} \subset \{b-3, b+1, 5\}$

즉, $5 = a-1$ 또는 $5 = a+2$, $4 = b-3$ 또는 $4 = b+1$.

i) $a = 6, b = 7$ 일 때, $A = \{5, 8, 4\}, B = \{4, 8, 5\}$ 이므로 $A \cap B = \{4, 5, 8\}$

ii) $a = 6, b = 3$ 일 때, $A = \{5, 8, 4\}, B = \{0, 4, 5\}$ 이므로 $A \cap B = \{4, 5\}$

iii) $a = 3, b = 7$ 일 때, $A = \{2, 5, 4\}, B = \{4, 8, 5\}$ 이므로 $A \cap B = \{4, 5\}$

iv) $a = 3, b = 3$ 일 때, $A = \{2, 5, 4\}, B = \{0, 4, 5\}$ 이므로 $A \cap B = \{4, 5\}$

i)~ iv) 에서 문제의 조건을 만족하는 것은 i) 의 경우이며 $a = 6, b = 7, c = 8$ 이다.

따라서 $a+b+c = 21$ 이다.

10. 다음 조건을 p라 할 때, 모든 실수 x에 대하여 p가 참인 것을 <u>모두</u> 고르면?

① $|x| = x$ ② $x^2 = 1$

③ $(x-1)(x+1) = x^2 - 1$ ④ $x^2 \geq 0$

⑤ $x^2 + 1 > 2x$

해설

① 모든 실수 x 에 대하여 $|x| = x$ (거짓)
$x \geqq 0$ 일 때 $|x| = x$, $x < 0$ 일 때 $|x| = -x$ 이다.
② 모든 실수 x 에 대하여 $x^2 = 1$ (거짓)
$x = \pm 1$ 일 때만 $x^2 = 1$ 이다.
③ 모든 실수 x 에 대하여 $(x-1)(x+1) = x^2 - 1$ (참)
④ 모든 실수 x 에 대하여 $x^2 \geq 0$ (참)
⑤ 모든 실수 x 에 대하여 $x^2 + 1 > 2x$ (거짓) $x^2 + 1 - 2x = (x-1)^2 \geq 0$ 이므로 $x \neq 1$ 인 x에 대해서만 $x^2 + 1 > 2x$ 이다.

11. 실수 x에 대하여 다음 명제가 참일 때, a의 최솟값을 구하여라.

$x > a$이면 $\lvert x-2\rvert > 4$

▶ 답 :

▷ 정답 : 6

해설

주어진 명제가 참이므로

대우 '$\lvert x-2\rvert \le 4$ 이면 $x \le a$ 이다.' 가 참이다.

$\lvert x-2\rvert \le 4$ 에서

$-4 \le x-2 \le 4,\quad -2 \le x \le 6$이므로

$\therefore\ a \ge 6$

따라서 a 의 최솟값은 6이다.

12. 다음의 두 진술이 모두 참이라고 할 때, 옳은 것은?

㉠ 키가 큰 학생은 농구를 잘한다.
㉡ 키가 큰 학생은 달리기 또는 수영을 잘한다.

① 키가 큰 학생은 달리기를 잘한다.

② 수영을 잘하는 학생은 농구도 잘한다.

③ 농구를 잘하는 학생은 달리기도 잘한다.

④ 달리기를 못하는 학생은 키가 크지 않다.

⑤ 달리기와 수영을 모두 못하는 학생은 키가 크지 않다.

해설

키가 큰 학생의 집합을 A , 농구를 잘하는 학생의 집합을 B, 달리기를 잘하는 학생의 집합을 C , 수영을 잘하는 학생의 집합을 D 라고 하면,

㉠ $A \subset B$ ㉡ $A \subset (C \cup D)$

① $A \subset (C \cup D)$ 에서 $A \subset C$ 라고 할 수 없으므로 거짓이다.

② $D \subset B$ 라고 할 수 없으므로 거짓이다.

③ $B \subset C$ 라고 할 수 없으므로 거짓이다.

④ $A \not\subset C$ 이므로 $C^c \not\subset A^c$ 에서 거짓이다.

⑤ $A \subset (C \cup D)$ 에서 $(C \cup D)^c \subset A^c$

즉, $C^c \cap D^c \subset A^c$ 이므로 참이다.

13. 다음은 실수 a, b, c 가 모두 양수일 때, $a^3+b^3+c^3-3abc \geq 0$ 임을 보이는 과정이다. [㉮] 안에 들어갈 알맞은 식은?

$$\begin{aligned} & a^3+b^3+c^3-3abc \\ &= (a+b+c)(a^2+b^2+c^2-ab-bc-ca) \\ &= \frac{1}{2}(a+b+c)(2a^2+2b^2+2c^2-2ab-2bc-2ca) \\ &= \frac{1}{2}(a+b+c)(a^2-2ab+b^2+b^2-2bc+c^2+c^2-2ca+a^2) \\ &= \frac{1}{2}(a+b+c)\ [㉮] \geq 0 \end{aligned}$$

① $(a-b)^2+(b-c)^2+(c-a)^2$

② $(a+b)^2+(b+c)^2+(c+a)^2$

③ $(a+b)^2-(b+c)^2-(c+a)^2$

④ $(a-b)^3+(b-c)^3+(c-a)^3$

⑤ $(a-b)^2-(b-c)^2-(c-a)^2$

해설

① $\{(a^2-2ab+b^2)+(b^2-2bc+c^2)+(c^2-2ca+a^2\}$
$=(a-b)^2+(b-c)^2+(c-a)^2$

14. $x > 0$, $y > 0$일 때, $4x + y + \dfrac{1}{\sqrt{xy}}$의 최솟값을 구하여라.

▶ 답 :

▷ 정답 : 4

해설

$x > 0,\ y > 0$ 일 때 $4x + y \geq 2\sqrt{4xy}$ 이므로

$$4x + y + \frac{1}{\sqrt{xy}} \geq 2\sqrt{4xy} + \frac{1}{\sqrt{xy}}$$

$$\geq 2\sqrt{4\sqrt{xy} \cdot \frac{1}{\sqrt{xy}}} = 4$$

$\therefore\ 4x + y + \dfrac{1}{\sqrt{xy}} \geq 4$, 최솟값 4

15. 집합 $X = \{a,\ b,\ c\}$에 대하여 X에서 X로의 함수 중 일대일대응이 아닌 함수의 개수를 구하여라.

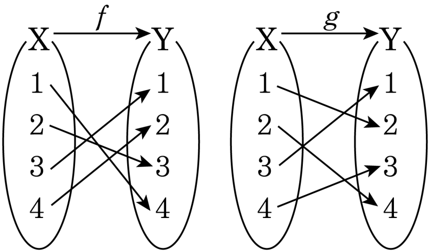
▶ **답 :** __________ 개

▷ **정답 :** 21 개

해설

X에서 X로의 함수의 총 개수에서
X에서 X로의 일대일대응의 개수를
제외하면 된다.
X에서 X로의 함수의 총 개수 : $3^3 = 27$
X에서 X로의 일대일대응의 개수
: $3 \times 2 \times 1 = 6$(개)
$\therefore \quad 27 - 6 = 21$(개)

16. 두 함수 f, g 가 아래 그림과 같이 정의될 때, $g = h \cdot f$ 를 만족시키는 함수 h 에 대하여 $h(2)$ 의 값은?



① 1　　② 2　　③ 3　　④ 4　　⑤ 5

해설

$g = h \cdot f$ 이고 함수 f 는 일대일대응이므로
역함수가 존재한다.

$\therefore\ g \cdot f^{-1}$

$= (h \cdot f) \cdot f^{-1} = h \cdot (f \cdot f^{-1})$

$= h \cdot I = h$

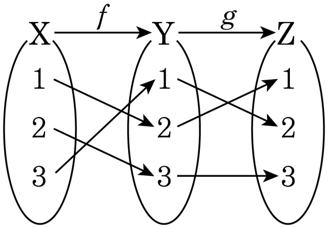
$\therefore\ h(2) = (g \cdot f^{-1})(2)$

$= g(f^{-1}(2))$

$= g(4)(\because\ f^{-1}(2) = 4)$

$\therefore\ g(4) = 3$

17. 두 함수 f, g 의 대응 관계가 다음 그림과 같을 때, $(f^{-1} \circ g)(2)$ 의 값은 얼마인가?



① 1 ② 2 ③ 3 ④ 4 ⑤ 5

해설

$(f^{-1} \circ g)(2) = f^{-1}(g(2)) = f^{-1}(1)$

f 의 역대응을 살펴보면 $f^{-1}(1) = 3$

18. 함수 f 에 대하여 역함수 f^{-1} 가 존재하고, 임의의 실수 x ,y 에 대하여 $f(x+y)=f(x)+f(y)$ 가 성립할 때, 다음 중 옳지 <u>않은</u> 것은 무엇인가?

① $f(0)=0$

② $f^{-1}(0)=0$

③ $f(2)=1$ 이면 $f(3)=\frac{3}{2}$

④ $f^{-1}(2)=1$ 이면 $f(4)=6$

⑤ $f^{-1}(x+y)=f^{-1}(x)+f^{-1}(y)$

해설

① $f(0+0)=f(0)+f(0)$ 이므로$f(0)=2f(0)$
$\therefore f(0)=0$ (참)

② ①에서 $f(0)=0$ 이므로 $f^{-1}(0)=0$ (참)

③ $f(2)=f(1+1)=f(1)+f(1)=2f(1)$

$f(2)=1$ 이므로 $f(1)=\frac{1}{2}$

$\therefore f(3)=f(2+1)=f(2)+f(1)$

$=1+\frac{1}{2}=\frac{3}{2}$ (참)

④ $f^{-1}(2)=1$ 이므로 $f(1)=2$
$\therefore f(2)=f(1+1)=f(1)+f(1)=4$
$\therefore f(4)=f(2+2)=f(2)+f(2)=8$ (거짓)

⑤ $f^{-1}(x)=a$, $f^{-1}(y)=b$ 라 하면
$f(a)=x$, $f(b)=y$
$\therefore f(a+b)=f(a)+f(b)=x+y$
$\therefore f^{-1}(x+y)=a+b=f^{-1}(x)+f^{-1}(y)$ (참)

19. 모든 양의 유리수는 다음과 같이 유한 개의 양의 정수 x_0, x_1, x_2, x_3, $\cdots$, x_n 을 이용하여 분자가 1인 분수의 꼴로 나타낼수 있다.

$$x_0+\cfrac{1}{x_1+\cfrac{1}{x_2+\cfrac{1}{x_3+\cfrac{1}{\cdots+\cfrac{1}{\ddots\; \ddots\; x_{n-1}+\cfrac{1}{x_n}}}}}}$$

이를테면, $\frac{3}{4}$은 $\frac{3}{4}=\cfrac{1}{1+\cfrac{1}{3}}$ 와 같이 나타낼 수 있다. 다음 □안에 들어갈 숫자들을 모두 더한 것은?

$$\frac{17}{7}=2+\frac{3}{7}=2+\cfrac{1}{\square+\cfrac{1}{\square}}$$

① 2　② 3　③ 4　④ 5　⑤ 6

해설

$$\frac{17}{7}=2+\frac{3}{7}=2+\cfrac{1}{\cfrac{7}{3}}=2+\cfrac{1}{2+\cfrac{1}{3}}$$

$\therefore 2+3=5$

20. 다음 분수함수의 그래프 중에서 평행이동하여 $y=-\dfrac{1}{x}$ 의 그래프와 겹쳐지는 것을 고르면?

① $y=\dfrac{x+4}{x+3}$　② $y=\dfrac{x+4}{x-3}$　③ $y=\dfrac{4x-4}{2x-1}$

④ $y=\dfrac{2x}{2x-1}$　⑤ $y=\dfrac{x+3}{2-x}$

해설

① $y=\dfrac{x+4}{x+3}=\dfrac{(x+3)+1}{x+3}=\dfrac{1}{x+3}+1$

② $y=\dfrac{x+4}{x-3}=\dfrac{(x-3)+7}{x-3}=\dfrac{7}{x-3}+1$

③ $y=\dfrac{4x-4}{2x-1}=\dfrac{2(2x-1)-2}{2x-1}=\dfrac{-2}{2x-1}+2=\dfrac{-1}{x-\frac{1}{2}}+2$

④ $y=\dfrac{2x}{2x-1}=\dfrac{(2x-1)+1}{2x-1}=\dfrac{1}{2x-1}+1=\dfrac{\frac{1}{2}}{x-\frac{1}{2}}+1$

⑤ $y=\dfrac{x+3}{2-x}=\dfrac{-(2-x)+5}{2-x}=\dfrac{-5}{x-2}-1$

21. 다음 중 함수 $y=\dfrac{-x+4}{x-2}$ 의 그래프가 지나지 않는 사분면은?

① 제1사분면　　② 제2사분면

③ 제3사분면　　④ 제4사분면

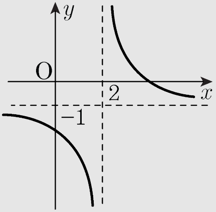
⑤ 모든 사분면을 지난다.

해설

$$y=\frac{-x+4}{x-2}$$

$$y=\frac{-(x-2)-2+4}{x-2}$$

$$y=\frac{2}{x-2}-1$$



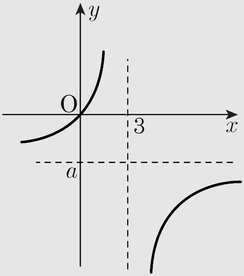
따라서 제2사분면을 지나지 않는다.

22. $0 \le x \le 2$에서, 유리함수 $y = \dfrac{-9}{x-3} + a$의 최솟값이 0이다. a의 값은?

① -5　　② -4　　③ -3　　④ -2　　⑤ -1

해설

점근선이 $x = 3$, $y = a$이고,
$0 \le x \le 2$에서 최솟값이 0이므로
점 $(0, 0)$을 지난다.



$$0 = \frac{-9}{0-3} + a$$

$\therefore\ a = -3$

23. $\dfrac{\sqrt{x+3}}{\sqrt{x-2}} = -\sqrt{\dfrac{x+3}{x-2}}$ 일 때, 방정식 $|\,x-3\,|-|\,x+2\,|= -1$ 의 해를 구하면?

① -1　② 0　③ 1　④ 5　⑤ 6

해설

$x+3 \geq 0,\ x-2<0 \rightarrow -3 \leq x < 2$

$-(x-3)-(x+2) = -2x+3-2 = -1$

$\therefore\ x=1$

24. $x+\sqrt{x^2+1}-\dfrac{1}{x+\sqrt{x^2+1}}$ 이 유리수가 되는 실수 x의 집합은?

① 정수 전체의 집합

② 유리수 전체의 집합

③ 실수 전체의 집합

④ $\sqrt{x^2+1}$ 이 유리수인 실수 x 의 집합

⑤ $x+\sqrt{x^2+1}$ 이 유리수인 실수 x 의 집합

해설

(주어진 식) $=x+\sqrt{x^2+1}$

$-\dfrac{x-\sqrt{x^2+1}}{(x+\sqrt{x^2+1})(x-\sqrt{x^2+1})}$

$=x+\sqrt{x^2+1}-\dfrac{x-\sqrt{x^2+1}}{-1}$

$=x+\sqrt{x^2+1}+x-\sqrt{x^2+1}=2x$

$\therefore$ $2x$ 가 유리수이려면 x 는 유리수이어야 한다.

25. $\sqrt{4+2\sqrt{3}}$의 정수 부분을 a, 소수 부분을 b라고 할 때, $\frac{a}{b}=p+\sqrt{q}$이다. $p+q$의 값을 구하여라.

▶ 답 :

▷ 정답 : 4

해설

$\sqrt{4+2\sqrt{3}}=\sqrt{3}+1=2.\times\times\times$

$a=2,\ b=\sqrt{3}-1$

$\frac{a}{b}=\frac{2}{\sqrt{3}-1}=\frac{2(\sqrt{3}+1)}{2}=\sqrt{3}+1$

$\therefore p=1,\ q=3$

$\therefore p+q=4$

26. 함수 $y=\sqrt{-2x+a}$의 그래프를 x축의 방향으로 1만큼, y축의 방향으로 b만큼 평행이동하였더니 함수 $y=\sqrt{-2x+4}-3$의 그래프와 겹쳐졌다. 이 때, 상수 a, b의 값을 각각 구하여라.

▶ 답 :

▶ 답 :

▷ 정답 : $a=2$

▷ 정답 : $b=-3$

해설

함수 $y=\sqrt{-2x+a}$의 그래프를
x축의 방향으로 1만큼, y축의 방향으로 b만큼
평행이동한 함수의 그래프의 식은
$y=\sqrt{-2(x-1)+a}+b=\sqrt{-2x+2+a}+b$
이 식이 $y=\sqrt{-2x+4}-3$과 같으므로
$2+a=4,\ b=-3$
$\therefore\ a=2,\ b=-3$

27. 무리함수 $f(x)=\sqrt{x}+\sqrt{8-x}$의 최댓값을 구하면?

① 1 ② 2 ③ 3 ④ 4 ⑤ 5

해설

$f(x)=\sqrt{x}+\sqrt{8-x}$에서
$x \geq 0,\ 8-x \geq 0$이므로
정의역은 $\{x \mid 0 \leq x \leq 8\}$, $f(x) \geq 0$이므로
$\{f(x)\}^2$이 최대일 때 $f(x)$도 최대이고
$\{f(x)\}^2 = x+2\sqrt{8x-x^2}+8-x = 8+2\sqrt{8x-x^2}$
이때, $y=8x-x^2=-(x-4)^2+16$이므로
$0 \leq x \leq 8$에서 $x=4$일 때 최댓값 16을 가진다.
따라서 $x=4$일 때 $\{f(x)\}^2$은
최댓값 16을 가지므로
$f(x)$의 최댓값은 4이다.

28. 함수 $y=\sqrt{2x}$ 의 그래프를 x축의 방향으로 a 만큼 평행이동한 그래프가 나타내는 함수의 식을 $y=f(x)$ 라 할 때, $y=f(x)$ 와 $y=f^{-1}(x)$ 의 그래프가 접하도록 상수 a 의 값을 구하면?

① $-\frac{1}{2}$　② $-\frac{1}{4}$　③ 0　④ $\frac{1}{4}$　⑤ $\frac{1}{2}$

해설

함수 $y=\sqrt{2x}$ 의 그래프를
x축의 방향으로 a 만큼 평행이동한
그래프의 식은 $y=\sqrt{2(x-a)}$
$y=f(x)$ 와 $y=f^{-1}(x)$ 의 그래프는
직선 $y=x$ 에 대하여 대칭이므로
$y=f(x)$ 와 $y=f^{-1}(x)$ 의 그래프가 접하려면
$y=\sqrt{2(x-a)}$ 의 그래프와 직선 $y=x$ 가 접해야 한다.
즉, $\sqrt{2(x-a)}=x$ 양변을 제곱하여 정리하면
$x^2-2x+2a=0$
$\frac{D}{4}=(-1)^2-2a=0$ 이므로
$a=\frac{1}{2}$

29. 다음 두 조건을 만족하는 집합 A 의 부분집합의 개수는?

$A \cap \{2,\ 3,\ 4,\ 5\} = \{2,\ 5\}$
$A \cup \{2,\ 3,\ 4,\ 5\} = \{1,\ 2,\ 3,\ 4,\ 5\}$

① 6개 ② 7개 ③ 8개 ④ 9개 ⑤ 10개

해설

$A \cap \{2,\ 3,\ 4,\ 5\} = \{2,\ 5\}$에서 집합 A는 원소 2, 5를 포함하고, 원소 3, 4는 포함하지 않는다.

$A \cup \{2,\ 3,\ 4,\ 5\} = \{1,\ 2,\ 3,\ 4,\ 5\}$에서 집합 A는 원소 1을 포함한다.

$\therefore\ A = \{1,\ 3,\ 4\}$

따라서 집합 A의 부분집합의 개수는 $2^3 = 8$ (개)이다.

30. 전체집합 $U = \{x|x$는 15이하의 홀수$\}$ 에 대하여 $A = \{1,\ 3,\ 7,\ 11\}$, $B = \{7,\ 13\}$ 일 때, 다음 보기에서 옳지 <u>않은</u> 것은?

보기

㉠ $A \cap B = \{7\}$

㉡ $A \cap B^c = \{1,\ 3,\ 7,\ 11\}$

㉢ $A^c \cap B = \{13\}$

㉣ $A^c \cup B^c = \{1,\ 3,\ 5,\ 9,\ 11,\ 13,\ 15\}$

㉤ $A^c \cap B^c = \{5,\ 9,\ 15\}$

▶ 답 :

▷ 정답 : ㉡

해설

$U = \{1,\ 3,\ 5,\ 7,\ 9,\ 11,\ 13,\ 15,\}$

$A = \{1,\ 3,\ 7,\ 11\}$,$B = \{7,\ 13\}$

㉡ $A \cap B^c = A - B = \{1,\ 3,\ 11\}$

㉢ $A^c \cap B = B - A = \{13\}$

㉣ $A^c \cup B^c = (A \cap B)^c = \{1,\ 3,\ 5,\ 9,\ 11,\ 13,\ 15\}$

㉤ $A^c \cap B^c = (A \cup B)^c = \{5,\ 9,\ 15\}$

31. 세 집합 $A,\ B,\ C$에 대하여 $n(A)=10, n(B)=8, n(C)=6\ , n(A\cup B)=14, n(B\cup C)=10, A\cap C=\varnothing$일 때, $n(A\cup B\cup C)$를 구하여라.

▶ 답 :

▷ 정답 : 16

해설

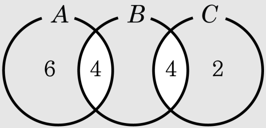
$A\cap C=\varnothing$ 이므로 $A\cap B\cap C=\varnothing$

$\therefore\ n(A\cap C)=0,\ n(A\cap B\cap C)=0$

그런데, $n(A\cap B)=n(A)+n(B)-n(A\cup B)=10+8-14=4$ $n(B\cap C)=n(B)+n(C)-n(B\cup C)=8+6-10=4$ 이므로 $n(A\cup B\cup C)$

$=n(A)+n(B)+n(C)-n(A\cap B)-n(B\cap C)-n(C\cap A)+n(A\cap B\cap C)$

$=10+8+6-4-4-0+0=16$



32. 양의 실수 전체의 집합에서 정의된 함수 $f(x)$가 임의의 양수 a, b에 대하여 $f(ab) = f(a) + f(b)$ 인 관계를 만족시킬 때, 다음 중 옳지 <u>않은</u> 것은?

① $f(1) = 1$

② $f(a) + f\left(\frac{1}{a}\right) = 0$

③ $f\left(a^2\right) = 2f(a)$

④ $f\left(a^n\right) = nf(a)$

⑤ $x > 1$ 일 때, $f(x) < 0$ 이면 $f(x)$는 감소함수이다.

해설

① $b = 1$ 이라고 하면
$f(a) = f(a \cdot 1) = f(a) + f(1)$
$\therefore\ f(1) = 0$

② $b = \frac{1}{a}$ 이면 $0 = f(1) = f\left(a \cdot \frac{1}{a}\right) = f(a) + f\left(\frac{1}{a}\right)$

③ $b = a$ 이면 $f(a^2) = f(a \cdot a) = f(a) + f(a) = 2f(a)$

④ ③에 의하여 $f(a^n) = f(a \cdot a \cdots a) = f(a) + f(a) + \cdots + f(a) = nf(a)$

⑤ $ab = x,\ a = y$ 이면 $b = \frac{x}{y}$ 이므로

$f(x) - f(y) = f\left(\frac{x}{y}\right)$

이 때, $x > y$ 이면 $\frac{x}{y} > 1$이므로 $f\left(\frac{x}{y}\right) < 0$

따라서 $f(x) < f(y)$이므로 $f(x)$는 감소함수

33. $x = \dfrac{1}{\sqrt{5+2\sqrt{6}}}, y = \dfrac{1}{\sqrt{5-2\sqrt{6}}}$ 일 때,
$x^4 + x^2y^2 + y^4 + 1$ 의 값을 구하면?

① $2\sqrt{3}$ ② 1 ③ 99 ④ 100 ⑤ 101

해설

$$x = \frac{1}{\sqrt{5+2\sqrt{6}}} = \frac{1}{\sqrt{3}+\sqrt{2}} = \sqrt{3}-\sqrt{2}$$

$$y = \frac{1}{\sqrt{5-2\sqrt{6}}} = \frac{1}{\sqrt{3}-\sqrt{2}} = \sqrt{3}+\sqrt{2}$$

$x + y = 2\sqrt{3}$, $xy = 1$

$x^2 + y^2 = (x+y)^2 - 2xy = 12 - 2 = 10$

$x^4 + y^4 = (x^2+y^2)^2 - 2x^2y^2 = 100 - 2 = 98$

$\therefore\ x^4 + x^2y^2 + y^4 + 1 = 98 + 1 + 1 = 100$

34. $xy<0$을 만족시키는 실수 $x,\ y$에 대하여 부등식 $x^2+y^2\ge axy$가 성립할 때, 실수 a의 최솟값을 구하면?

① -1 ② -2 ③ -3 ④ -4 ⑤ -5

해설

주어진 부등식의 양변을 xy로 나누면

$xy<0$이므로 $\dfrac{x}{y}+\dfrac{y}{x}\le a$

즉 $\left(-\dfrac{x}{y}\right)+\left(-\dfrac{y}{x}\right)\ge -a$

$-\dfrac{x}{y}>0,\quad -\dfrac{y}{x}>0$이므로

$$\left(-\frac{x}{y}\right)+\left(-\frac{y}{x}\right)\ge 2\sqrt{\left(-\frac{x}{y}\right)\left(-\frac{y}{x}\right)}=2$$

$\therefore 2\ge -a$

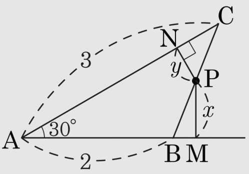
$\therefore a\ge -2$

따라서, a의 최솟값은 -2 이다.

35. $\angle A = 30°$, $\overline{AB} = 2$, $\overline{AC} = 3$인 삼각형 ABC에서 변 BC위를 움직이는 동점 P가 있다. 점 P에서 직선 AB, AC에 내린 수선의 발을 각각 M, N이라 할 때, $\dfrac{\overline{AB}}{\overline{PM}} + \dfrac{\overline{AC}}{\overline{PN}}$의 최솟값은?

① $\dfrac{25}{4}$ ② $\dfrac{25}{3}$ ③ $\dfrac{25}{2}$ ④ 25 ⑤ 35

해설



$\overline{PM} = x$, $\overline{PN} = y$라 하면

$\triangle APB + \triangle APC = \triangle ABC$이므로

$\dfrac{1}{2} \cdot 2 \cdot x + \dfrac{1}{2} \cdot 3 \cdot y = \dfrac{1}{2} \cdot 2 \cdot 3 \cdot \sin 30°$

$\therefore\ 2x + 3y = 3$

$x > 0,\ y > 0$이므로

$\left(\dfrac{2}{x} + \dfrac{3}{y}\right) \cdot (2x + 3y) = 13 + 6\left(\dfrac{y}{x} + \dfrac{x}{y}\right)$

$\geq 13 + 6 \cdot 2 \cdot \sqrt{\dfrac{y}{x} \cdot \dfrac{x}{y}}$

$\therefore\ \left(\dfrac{2}{x} + \dfrac{3}{y}\right) \times 3 \geq 13 + 12 = 25$

$\therefore\ \dfrac{2}{x} + \dfrac{3}{y} \geq \dfrac{25}{3}$

$\therefore\ \dfrac{\overline{AB}}{\overline{PM}} + \dfrac{\overline{AC}}{\overline{PN}}$의 최솟값은 $\dfrac{25}{3}$

36. 세 상자 P, Q, R에 들어 있는 구슬의 개수의 비가 처음에는 $2:3:4$였다. 전체 구슬의 개수는 변함없이 각 상자에서 구슬을 꺼내 다른 상자에 넣는 시행을 반복한 후, P, Q, R에 들어 있는 구슬의 개수의 비를 구했더니 $3:2:5$가 되었다. P상자에 들어 있는 구슬의 개수가 처음보다 7개가 늘었다면 R상자에 들어있는 구슬의 개수의 변화는?

① 처음보다 7개 줄었다.
② 처음보다 6개 줄었다.
③ 개수의 변화가 없다.
④ 처음보다 5개 늘었다.
⑤ 처음보다 8개 늘었다.

해설

전체 구슬의 개수를 x라 하면 조건에서
P상자의 구슬이 7개 늘었으므로

$$\frac{3x}{10} - \frac{2x}{9} = 7$$

$\therefore\ x = 90$ (개)

따라서 R 상자의 구슬의 개수는 시행 전

$: 4 \times \frac{90}{9} = 40$ (개)

시행 후 : $5 \times \frac{90}{10} = 45$ (개) 이므로

시행 후에 처음보다 5개가 늘었다.