1. 사차방정식 $(x-1)(x-2)(x+2)(x+3)=-3$을 풀면?

① $x=\pm 2$ 또는 $x=2\pm 3\sqrt{6}$

② $x=\pm 4$ 또는 $x=\dfrac{-1\pm\sqrt{13}}{2}$

③ $x=\dfrac{3\pm\sqrt{3}i}{2}$ 또는 $x=\dfrac{-1\pm\sqrt{13}}{2}$

④ $x=\dfrac{-1\pm\sqrt{13}}{2}$ 또는 $x=\dfrac{-1\pm\sqrt{21}}{2}$

⑤ $x=\dfrac{-1\pm\sqrt{13}}{2}$ 또는 $x=\dfrac{-1\pm\sqrt{5}i}{2}$

해설

$(x-1)(x-2)(x+2)(x+3)=-3$에서

$(x-1)(x-2)(x+2)(x+3)+3=0$ 이므로

$(x^2+x-2)(x^2+x-6)+3=0$에서

$x^2+x=t$로 치환하면

$$\begin{aligned}(t-2)(t-6)+3&=t^2-8t+12+3\\&=t^2-8t+15\\&=(t-3)(t-5)=0\end{aligned}$$

따라서 $(x^2+x-3)(x^2+x-5)=0$

$x^2+x-3=0$ 에서

$x=\dfrac{-1\pm\sqrt{13}}{2}$

$x^2+x-5=0$ 에서

$x=\dfrac{-1\pm\sqrt{21}}{2}$

2. $x^4+2x^3-3x^2+2x+1=0$일 때, $x+\frac{1}{x}$의 값은?(단, x는 실수)

① $-1+\sqrt{6}$ ② $-1-\sqrt{6}$ ③ $\frac{-3+\sqrt{5}}{2}$

④ $\frac{-3-\sqrt{5}}{2}$ ⑤ 1

해설

(i) $x \neq 0$이므로

$x^4+2x^3-3x^2+2x+1=0$의 양변을

x^2으로 나누면

$$x^2+2x-3+\frac{2}{x}+\frac{1}{x}^{2}=0$$

$$\therefore \left(x^2+\frac{1}{x}^{2}\right)+2\left(x+\frac{1}{x}\right)-3=0$$

$x+\frac{1}{x}=t$로 놓으면

$(t^2-2)+2t-3=0,\ t^2+2t-5=0$

$\therefore\ t=-1\pm\sqrt{6}$

(ii) $x+\frac{1}{x}=-1\pm\sqrt{6}$

그런데 $\left|x+\frac{1}{x}\right| \geq 2$이므로

($\because$ x는 실수)

$$\therefore\ x+\frac{1}{x}=-1-\sqrt{6}$$

3. 삼차방정식 $x^3+(p-4)x-2p=0$의 중근을 α, 다른 한 근을 β라 할 때 $\alpha+\beta+p$의 값을 구하면?

① -10 또는 -2 ② -10 또는 -1 ③ -10 또는 2

④ -10 또는 4 ⑤ -10 또는 5

해설

$f(x)=x^3+(p-4)x-2p$로 놓으면 $f(2)=0$이므로

$f(x)=(x-2)(x^2+2x+p)=0$

따라서 $x=2,\ x^2+2x+p=0$

그런데 중근을 가져야 하므로

i) $x=2$가 x^2+2x+p의 근일 때

$2^2+2\times2+p=0$

$\therefore\ p=-8,\ f(x)=(x-2)(x^2+2x-8)=(x-2)^2(x+4)$

$\therefore\ \alpha=2,\ \beta=-4$

따라서, $\alpha+\beta+p=2+(-4)+(-8)=-10$

ii) $x^2+2x+p=0$이 중근을 가질 때

$D/4=0$이므로 $D/4=1-p=0$

$\therefore\ p=1,\ f(x)=(x-2)(x^2+2x+1)=(x-2)(x+1)^2$

$\therefore\ \alpha=-1,\ \beta=2,\ p=1$

따라서, $\alpha+\beta+p=-1+2+1=2$

i) ii)로부터 $\alpha+\beta+p$의 값은 -10 또는 2이다.

4. 다음과 같은 식의 변형을 이용하여 알 수 있는 것은? (단, $\overline{z}$ 는 z 의 켤레복소수를 나타낸다.)

$$\overline{az^3+bz^2+cz+d} = \overline{az^3} + \overline{bz^2} + \overline{cz} + \overline{d}$$
$$= \overline{a}\,\overline{z}^3 + \overline{b}\,\overline{z}^2 + \overline{c}\,\overline{z} + \overline{d}$$
$$= \overline{a}(\overline{z})^3 + \overline{b}(\overline{z})^2 + \overline{c}(\overline{z}) + \overline{d}$$

① z 가 $ax^3+bx^2+cx+d=0$ 의 근이면, $\overline{z}$ 는 $ax^3+bx^2+cx+d=0$ 의 근이다.

② z 가 $ax^3+bx^2+cx+d=0$ 의 근이면, $\overline{z}$ 는 $\overline{a}x^3+\overline{b}x^2+\overline{c}x+\overline{d}=0$ 의 근이다.

③ $ax^3+bx^2+cx+d=0$ 의 근과 $\overline{a}x^3+\overline{b}x^2+\overline{c}x+\overline{d}=0$ 의 근은 같다.

④ $\overline{z}$ 가 $ax^3+bx^2+cx+d=0$ 의 근이면, z 는 $ax^3+bx^2+cx+d=0$ 의 근이다.

⑤ $\overline{z}$ 가 $\overline{a}x^3+\overline{b}x^2+\overline{c}x+\overline{d}=0$ 의 근이면, z 는 $ax^3+bx^2+cx+d=0$ 의 근이다.

해설

z 가 $ax^3+bx^2+cx+d=0$ 의 근이면,

$az^3+bz^2+cz+d=0$

$\overline{ax^3+bz^2+cz+d}$

$= \overline{az^3} + \overline{bz^2} + \overline{cz} + \overline{d}$

$= \overline{a}(\overline{z})^3 + \overline{b}(\overline{z})^2 + \overline{c}(\overline{z}) + \overline{d}$

$=0$ 이므로

$\overline{z}$ 는 $\overline{a}x^3+\overline{b}x^2+\overline{c}x+\overline{d}=0$ 의 근이다.

5. 삼차방정식 $x^3+ax^2-b=0$ 의 한 근이 $1+i$ 일 때, $a+b$ 의 값은?

① -3 ② -2 ③ -1 ④ 0 ⑤ 1

해설

$x^3+ax^2-b=0$ 의 세 근이 $1+i, 1-i, \alpha$ 라고 하면

세 근의 합 : $1+i+1-i+\alpha=-a \quad \cdots$ ㉠

$0=(1+i)(1-i)+\alpha(1-i)+\alpha(1+i) \quad \cdots$ ㉡

세 근의 곱 : $(1+i)(1-i)\alpha=b \quad \cdots$ ㉢

㉡식에서 $1+1+2\alpha=0$, $\alpha=-1$

㉠식에서 $2+\alpha=-a$, $a=-1$

㉢식에서 $-1(1+i)(1-i)=b$, $b=-2$

$\therefore\ a+b=-3$

6. 이차방정식 $x^2+x+1=0$의 서로 다른 두 근을 α,β라 할 때, $(\alpha+\beta)+(\alpha^2+\beta^2)+\ldots+(\alpha^{100}+\beta^{100})$의 값을 구하면?

① -2 ② -1 ③ 0 ④ 1 ⑤ 2

해설

이차방정식 $x^2+x+1=0$의
서로 다른 두 근이 $\alpha,\ \beta$이므로
$\alpha^2+\alpha+1=0,\ \beta^2+\beta+1=0$
또, $\alpha+\beta=-1,\ \ \alpha\beta=1$
n이 양의 정수일 때,
$\alpha^{n+2}+\alpha^{n+1}+\alpha^n$
$=\alpha^n(\alpha^2+\alpha+1)=0$
$\beta^{n+2}+\beta^{n+1}+\beta^n$
$=\beta^n(\beta^2+\beta+1)=0$이므로
$(\alpha+\beta)+(\alpha^2+\beta^2)+\cdots+(\alpha^{100}+\beta^{100})$
$=\alpha+\{(\alpha^2+\alpha^3+\alpha^4)+\cdots+(\alpha^{98}+\alpha^{99}+\alpha^{100})\}$
$+\beta+\{(\beta^2+\beta^3+\beta^4)+\cdots+(\beta^{98}+\beta^{99}+\beta^{100})\}$
$=\alpha+\beta=-1$

7. 다음은 α가 삼차방정식 $x^3-3x+1=0$의 한 근일 때, α^2-2도 이 방정식의 근임을 보인 것이다. (가)~(마)에 들어갈 말로 옳지 않은 것은?

α 는 $x^3-3x+1=0$ 의 근이므로 (가) $f(x)=x^3-3x+1$ 이라고 하면 $f(\alpha^2-2)=$ (나) $=$ (다) $=$ (라) $=$ (마) $=0$ 따라서, α^2-2 도 삼차방정식 $x^3-3x+1=0$ 의 근이다.

① (가) $\alpha^3-3\alpha+1=0$

② (나) $(\alpha^2-2)^3-3(\alpha^2-2)+1$

③ (다) $\alpha^6-6\alpha^4+9\alpha^2-1$

④ (라) $(\alpha^3-3\alpha+1)(\alpha^3-3\alpha-1)$

⑤ (마) $0\cdot 2$

해설

α는 $x^3-3x+1=0$의 근이므로 $\alpha^3-3\alpha+1=0$

$f(x)=x^3-3x+1$이라고 하면 $f(\alpha^2-2)=(\alpha^2-2)^3-3(\alpha^2-2)+1$

$=\alpha^6-6\alpha^4+9\alpha^2-1=(\alpha^3-3\alpha+1)(\alpha^3-3\alpha-1)=0\cdot(-2)=0$

따라서 α^2-2도 삼차방정식 $x^3-3x+1=0$의 근이다.