

1. 삼차방정식 $x^3 - (7 \cdot 2^3)x^2 + (7 \cdot 2^7)x - 2^{12} = 0$ 의 세 근을 α, β, γ ($\alpha < \beta < \gamma$)라 할 때, $\alpha \leq m \leq \gamma$ 인 정수 m 의 개수를 구하면?

① 23개 ② 24개 ③ 25개 ④ 26개 ⑤ 27개

해설

$f(x) = x^3 - (7 \cdot 2^3)x^2 + (7 \cdot 2^7)x - 2^{12}$ 이라 할 때 $f(2^3) = f(2^4) = f(2^5) = 0$ 이므로

$f(x) = (x - 2^3)(x - 2^4)(x - 2^5)$

$\alpha < \beta < \gamma$ 에서 $\alpha = 2^3$, $\gamma = 2^5$ 이므로

$2^3 \leq m \leq 2^5$

$\therefore$ 정수 m 의 개수는 $2^5 - 2^3 + 1 = 25$

2. $x^4 + 2x^3 - x^2 + 2x + 1 = 0$ 의 한 허근을 w 라 할 때, $w^{2006} + \left(\frac{1}{w}\right)^{2006}$ 의 값은?

- ① -1 ② 0 ③ 1 ④ 2 ⑤ 3

해설

짝수차 상반방정식이므로
양변을 x^2 으로 나누면
 $x^4 + 2x^3 - x^2 + 2x + 1 = 0$
 $\left\{ \left(x + \frac{1}{x}\right)^2 + 2\left(x + \frac{1}{x}\right) \right\} - 3 = 0$
 $x + \frac{1}{x} = z$ 로 놓으면
 $z^2 + 2z - 3 = (z + 3)(z - 1) = 0$
 $\therefore z = -3$ 또는 $z = 1$
(i) $z = -3$ 일 때,
 $x + \frac{1}{x} = -3$ 에서 $x^2 + 3x + 1 = 0$
 $\therefore x = \frac{-3 \pm \sqrt{5}}{2}$: 실근
(ii) $z = 1$ 일 때,
 $x + \frac{1}{x} = 1$ 에서
 $x^2 - x + 1 = 0$
 $x^2 - x + 1 = 0$ 의 해는 허수이므로
 w 는 $x^2 - x + 1 = 0$ 의 해이다.
 $\therefore w^2 - w + 1 = 0, w^3 = -1$
 $\therefore w^{2006} + \left(\frac{1}{w}\right)^{2006}$
 $= w^2 \cdot w^{2004} + \frac{1}{w^2 \cdot w^{2004}}$
 $= w^2 + \left(\frac{1}{w}\right)^2 = w^2 - w = -1$

3. x 에 관한 방정식 $x^4 - 3x^3 + 5x^2 + ax + b = 0$ 의 한 근이 $1 - 2i$ 일 때, 실수 a, b 의 값을 구하면?

① $a = -1, b = -2$

② $a = -1, b = -10$

③ $a = 1, b = 4$

④ $a = 1, b = 6$

⑤ $a = 2, b = 6$

해설

$$x = 1 - 2i \text{에서 } x - 1 = -2i$$

$$\text{양변을 제곱하면 } x^2 - 2x + 1 = -4 \Leftrightarrow x^2 - 2x + 5 = 0$$

$$x^4 - 3x^3 + 5x^2 + ax + b = 0 \text{의 좌변을 } x^2 - 2x + 5 \text{로 나누면}$$

나누어 떨어진다.

실제로 나눗셈을 하여 정리하면

$$x^4 - 3x^3 + 5x^2 + ax + b$$

$$= (x^2 - 2x + 5)(x^2 - x - 2) + (a + 1)x + b + 10 = 0$$

$$x^2 - 2x + 5 = 0 \text{이므로}$$

$$(a + 1)x + b + 10 = 0$$

$$\therefore a + 1 = 0, b + 10 = 0$$

$$\therefore a = -1, b = -10$$

4. 서로 다른 세 실수 a, b, c 가 $a^3 - 6a = b^3 - 6b = c^3 - 6c = -1$ 을 만족시킬 때, $a^3 + b^3 + c^3$ 의 값은?

① 1 ② -1 ③ 3 ④ -3 ⑤ 6

해설

$a^3 - 6a = -1$, $b^3 - 6b = -1$, $c^3 - 6c = -1$ 이므로
 a, b, c 는 삼차방정식 $x^3 - 6x = -1$
즉, $x^3 - 6x + 1 = 0$ 의 세 근이다.
따라서, 근과 계수와의 관계에서 $a + b + c = 0$, $ab + bc + ca = 6$, $abc = -1$
 $\therefore a^3 + b^3 + c^3 - 3abc = (a + b + c)(a^2 + b^2 + c^2 - ab - bc - ca)$
에서 $a + b + c = 0$ 이므로 $a^3 + b^3 + c^3 = 3abc = 3 \cdot (-1) = -3$

5. 방정식 $x^3 = 1$ 의 한 허근을 α , 방정식 $x^3 = 2$ 의 한 허근을 β 라고 할 때, $x^3 - 2 = (x - \beta)(x - \alpha\beta)p(x)$ 를 만족시키는 다항식 $p(x)$ 에 대하여 $p(\alpha^5\beta)$ 의 값은?

- ① α ② $\alpha\beta$ ③ α^2 ④ 0 ⑤ 1

해설

$$\begin{aligned}\beta^3 &= 2, \quad (\alpha\beta)^3 = \alpha^3\beta^3 = 2, \\ (\alpha^2\beta)^3 &= (\alpha^3)^2 \cdot \beta^3 = 2 \text{이므로} \\ \text{방정식 } x^3 &= 2 \text{의 근은 } \beta, \alpha\beta, \alpha^2\beta \text{이다.} \\ \text{따라서 } x^3 - 2 &= (x - \beta)(x - \alpha\beta)(x - \alpha^2\beta) \\ \therefore p(x) &= x - \alpha^2\beta \\ \therefore p(\alpha^5\beta) &= \alpha^5\beta - \alpha^2\beta \\ &= \alpha^3 \cdot \alpha^2\beta - \alpha^2\beta \\ &= \alpha^2\beta - \alpha^2\beta \\ &= 0\end{aligned}$$

6. 방정식 $x^3 + 2x^2 + px + q = 0$ 이 한 실근과 두 허근 α, α^2 을 가질 때, 실수 p, q 의 곱은?

- ① -2 ② 2 ③ -3 ④ 3 ⑤ 1

해설

(i) 한 허근을 $\alpha = a+bi$ (a, b 는 실수, $b \neq 0$)라 하면 $\alpha^2 = a-bi$
($\because$ 계수가 실수인 방정식)

$$\therefore (a+bi)^2 = a^2 - b^2 + 2abi = a - bi$$

$$a^2 - b^2 = a \cdots \cdots \cdots \textcircled{1}$$

$$2ab = -b \cdots \cdots \cdots \textcircled{2}$$

①, ②에서 $b \neq 0$ 이므로

$$a = -\frac{1}{2}, b = \pm \frac{\sqrt{3}}{2}$$

$$\alpha = -\frac{1}{2} + \frac{\sqrt{3}}{2}i \text{라 하면 } \alpha^2 = -\frac{1}{2} - \frac{\sqrt{3}}{2}i$$

(ii) α, α^2 을 두 근으로 하는 이차방정식은 $x^2 + x + 1 = 0$
한 실근을 β 라고 할 때, 세 근의 합은

$$\beta + (-\frac{1}{2} + \frac{\sqrt{3}}{2}i) + (-\frac{1}{2} - \frac{\sqrt{3}}{2}i) = -2 \therefore \beta = -1$$

$$\therefore x^3 + 2x^2 + px + q$$

$$= (x^2 + x + 1)(x + 1)$$

$$= x^3 + 2x^2 + 2x + 1$$

$$\therefore p = 2, q = 1$$

$$\therefore pq = 2$$

7. 삼차 방정식의 $x^3 - 1 = 0$ 의 한 허근을 w 라 하고, 자연수 n 에 대하여 $f(n) = \frac{w^n}{1 + w^{2n}}$ 이라 할 때, $f(1) - f(2) + f(3) - f(4) + \cdots + f(19)$ 의 값은?

- ① -1 ② $-\frac{1}{2}$ ③ 0 ④ $\frac{1}{2}$ ⑤ 1

해설

$$x^3 - 1 = 0 \rightarrow w^3 = 1$$

$$\Rightarrow (x-1)(x^2 + x + 1) = 0$$

$$\rightarrow w^2 + w + 1 = 0$$

$$f(3n) = \frac{w^{3n}}{1 + w^{6n}} = \frac{(w^3)^n}{1 + (w^3)^{2n}} = \frac{1}{2}$$

$$f(3n+1) = \frac{w^{3n+1}}{1 + w^{6n+2}} = \frac{w}{1 + w^2} = -1$$

$$f(3n+2) = \frac{w^{3n+2}}{1 + w^{6n+4}} = \frac{w^2}{1 + w} = -1$$

즉 $-1, -1, \frac{1}{2}$ 가 계속 반복되고

항이 번갈아 가면서 부호가 바뀌므로

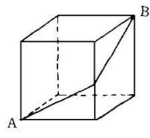
순서대로 6개의 항까지의 값이 0이 된다.

$$\therefore f(1) - f(2) + f(3) - f(4) + \cdots + f(19)$$

$$= (-1) - (-1) + \frac{1}{2} - (-1) + \cdots + f(19)$$

$$= 0 + f(19) = -1$$

8. 다음 그림과 같이 모든 모서리의 합이 28 cm, 겹넓이가 28cm^2 , 부피가 8cm^3 인 직육면체가 있다. 이 직육면체에서 면을 따라 꼭지점 A에서 꼭짓점 B에 이르는 가장 짧은 거리는?



- ① 5cm ② 6cm ③ $2\sqrt{5}\text{cm}$
 ④ $\sqrt{29}\text{cm}$ ⑤ $\sqrt{37}\text{cm}$

해설

각 모서리의 길이를 a, b, c 라 하면

$$4(a + b + c) = 28$$

$$2(ab + bc + ca) = 28$$

$$abc = 8$$

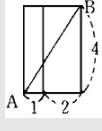
$$\therefore a + b + c = 7$$

$$ab + bc + ca = 14$$

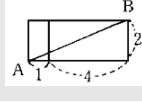
$$abc = 8$$

이 때, a, b, c 를 세 근으로 하는 x 에 대한 삼차방정식은 $x^3 - 7x^2 + 14x - 8 = 0$ $(x - 1)(x - 2)(x - 4) = 0$ 그러므로 모서리의 길이는 각각 1cm, 2cm, 4cm 이다. 이제 꼭짓점 A 에서 꼭지점 B 에 이르는 거리를 전개도를 이용하여 구해 보자.

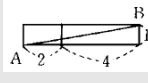
(i)



(ii)



(iii)



$$(i) \text{ 에서 } \overline{AB} = \sqrt{3^2 + 4^2} = 5(\text{cm})$$

$$(ii) \text{ 에서 } \overline{AB} = \sqrt{5^2 + 2^2} = \sqrt{29}(\text{cm})$$

$$(iii) \text{ 에서 } \overline{AB} = \sqrt{6^2 + 1^2} = \sqrt{37}(\text{cm})$$

따라서 A 에서 B 에 이르는 가장 짧은 거리는 5cm