**1.** 삼차방정식 $x^3-(7\cdot 2^3)x^2+(7\cdot 2^7)x-2^{12}=0$의 세 근을 $\alpha,\beta,\gamma(\alpha<\beta<\gamma)$라 할 때, $\alpha\le m\le\gamma$인 정수 $m$의 개수를 구하면?

① 23 개 ② 24 개 ③ 25 개 ④ 26 개 ⑤ 27 개

해설

$f(x)=x^3-(7\cdot 2^3)x^2+(7\cdot 2^7)x-2^{12}$이라 할 때 $f(2^3)=f(2^4)=f(2^5)=0$ 이므로

$f(x)=(x-2^3)(x-2^4)(x-2^5)$

$\alpha<\beta<\gamma$ 에서 $\alpha=2^3,\ \gamma=2^5$ 이므로

$2^3\le m\le 2^5$

$\therefore$ 정수 $m$의 개수는 $2^5-2^3+1=25$

**2.** $x^4+2x^3-x^2+2x+1=0$의 한 허근을 $w$라 할 때, $w^{2006}+\left(\frac{1}{w}\right)^{2006}$의 값은?

① $-1$　② $0$　③ $1$　④ $2$　⑤ $3$

해설

짝수차 상반방정식이므로
양변을 $x^2$ 으로 나누면
$x^4+2x^3-x^2+2x+1=0$
$$\left\{\left(x+\frac{1}{x}\right)^2+2\left(x+\frac{1}{x}\right)\right\}-3=0$$
$x+\frac{1}{x}=z$로 놓으면
$z^2+2z-3=(z+3)(z-1)=0$
$\therefore\ z=-3$ 또는 $z=1$
( i ) $z=-3$일 때,
$x+\frac{1}{x}=-3$에서 $x^2+3x+1=0$
$\therefore\ x=\frac{-3\pm\sqrt{5}}{2}$: 실근
( ii ) $z=1$일 때,
$x+\frac{1}{x}=1$에서
$x^2-x+1=0$
$x^2-x+1=0$의 해는 허수이므로
$w$는 $x^2-x+1=0$의 해이다.
$\therefore\ w^2-w+1=0,\ w^3=-1$
$$\therefore\ w^{2006}+\left(\frac{1}{w}\right)^{2006}$$
$$=w^2\cdot w^{2004}+\frac{1}{w^2\cdot w^{2004}}$$
$$=w^2+\left(\frac{1}{w}\right)^2=w^2-w=-1$$

**3.** $x$에 관한 방정식 $x^4-3x^3+5x^2+ax+b=0$의 한 근이 $1-2i$일 때, 실수 $a, b$의 값을 구하면?

① $a=-1, b=-2$

② $a=-1, b=-10$

③ $a=1, b=4$

④ $a=1, b=6$

⑤ $a=2, b=6$

해설

$x=1-2i$에서 $x-1=-2i$

양변을 제곱하면 $x^2-2x+1=-4 \Leftrightarrow x^2-2x+5=0$

$x^4-3x^3+5x^2+ax+b=0$의 좌변을 $x^2-2x+5$로 나누면 나누어 떨어진다.

실제로 나눗셈을 하여 정리하면

$x^4-3x^3+5x^2+ax+b$

$=(x^2-2x+5)(x^2-x-2)+(a+1)x+b+10=0$

$x^2-2x+5=0$이므로

$(a+1)x+b+10=0$

$\therefore\ a+1=0,\ b+10=0$

$\therefore\ a=-1,\ b=-10$

**4.** 서로 다른 세 실수 $a, b, c$가 $a^3 - 6a = b^3 - 6b = c^3 - 6c = -1$을 만족시킬 때, $a^3 + b^3 + c^3$의 값은?

① 1　　② $-1$　　③ 3　　④ $-3$　　⑤ 6

해설

$a^3 - 6a = -1,\ b^3 - 6b = -1,\ c^3 - 6c = -1$이므로

$a,\ b,\ c$는 삼차방정식 $x^3 - 6x = -1$

즉, $x^3 - 6x + 1 = 0$의 세 근이다.

따라서, 근과 계수와의 관계에서 $a + b + c = 0,\ ab + bc + ca = 6,\ abc = -1$

$\therefore\ a^3 + b^3 + c^3 - 3abc = (a + b + c)(a^2 + b^2 + c^2 - ab - bc - ca)$

에서 $a + b + c = 0$이므로 $a^3 + b^3 + c^3 = 3abc = 3 \cdot (-1) = -3$

**5.** 방정식 $x^3=1$의 한 허근을 $\alpha$, 방정식 $x^3=2$의 한 허근을 $\beta$라고 할 때, $x^3-2=(x-\beta)(x-\alpha\beta)p(x)$를 만족시키는 다항식 $p(x)$에 대하여 $p(\alpha^5\beta)$의 값은?

① $\alpha$ ② $\alpha\beta$ ③ $\alpha^2$ ④ 0 ⑤ 1

해설

$\beta^3=2,\ (\alpha\beta)^3=\alpha^3\beta^3=2,$
$(\alpha^2\beta)^3=(\alpha^3)^2\cdot\beta^3=2$이므로
방정식 $x^3=2$의 근은 $\beta,\ \alpha\beta,\ \alpha^2\beta$이다.
따라서 $x^3-2=(x-\beta)(x-\alpha\beta)(x-\alpha^2\beta)$
$\therefore\ p(x)=x-\alpha^2\beta$

$$\begin{aligned}\therefore\ p(\alpha^5\beta)&=\alpha^5\beta-\alpha^2\beta\\&=\alpha^3\cdot\alpha^2\beta-\alpha^2\beta\\&=\alpha^2\beta-\alpha^2\beta\\&=0\end{aligned}$$

**6.** 방정식 $x^3+2x^2+px+q=0$ 이 한 실근과 두 허근 $\alpha,\ \alpha^2$ 을 가질 때, 실수 $p,\ q$ 의 곱은?

① $-2$ ② $2$ ③ $-3$ ④ $3$ ⑤ $1$

해설

( i ) 한 허근을 $\alpha=a+bi$ ($a,\ b$ 는 실수, $b\neq 0$) 라 하면 $\alpha^2=a-bi$
( ∵ 계수가 실수인 방정식 )
$\therefore (a+bi)^2=a^2-b^2+2abi=a-bi$
$a^2-b^2=a \cdots\cdots\cdots$ ①
$2ab=-b \cdots\cdots\cdots$ ②
①, ② 에서 $b\neq 0$ 이므로

$$a=-\frac{1}{2},\ b=\pm\frac{\sqrt{3}}{2}$$

$\alpha=-\frac{1}{2}+\frac{\sqrt{3}}{2}i$ 라 하면 $\alpha^2=-\frac{1}{2}-\frac{\sqrt{3}}{2}i$

( ii ) $\alpha,\ \alpha^2$ 을 두 근으로 하는 이차방정식은 $x^2+x+1=0$
한 실근을 $\beta$ 라고 할 때, 세 근의 합은

$$\beta+\left(-\frac{1}{2}+\frac{\sqrt{3}}{2}i\right)+\left(-\frac{1}{2}-\frac{\sqrt{3}}{2}i\right)=-2 \ \therefore \beta=-1$$

$\therefore x^3+2x^2+px+q$
$=(x^2+x+1)(x+1)$
$=x^3+2x^2+2x+1$
$\therefore p=2,\ q=1$
$\therefore pq=2$

**7.** 삼차 방정식의 $x^3-1=0$의 한 허근을 $w$라 하고, 자연수 $n$에 대하여 $f(n)=\dfrac{w^n}{1+w^{2n}}$이라 할 때, $f(1)-f(2)+f(3)-f(4)+\cdots+f(19)$의 값은?

① $-1$ ② $-\dfrac{1}{2}$ ③ $0$ ④ $\dfrac{1}{2}$ ⑤ $1$

해설

$x^3-1=0 \quad \rightarrow \quad w^3=1$

$\Rightarrow (x-1)(x^2+x+1)=0$

$\rightarrow w^2+w+1=0$

$$f(3n)=\frac{w^{3n}}{1+w^{6n}}=\frac{(w^3)^n}{1+(w^3)^{2n}}=\frac{1}{2}$$

$$f(3n+1)=\frac{w^{3n+1}}{1+w^{6n+2}}=\frac{w}{1+w^2}=-1$$

$$f(3n+2)=\frac{w^{3n+2}}{1+w^{6n+4}}=\frac{w^2}{1+w}=-1$$

즉 $-1,\ -1,\ \dfrac{1}{2}$가 계속 반복되고

항이 번갈아 가면서 부호가 바뀌므로

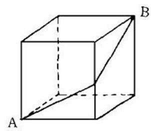
순서대로 6개의 항까지의 값이 0이 된다.

$\therefore \quad f(1)-f(2)+f(3)-f(4)+\cdots+f(19)$

$=(-1)-(-1)+\dfrac{1}{2}-(-1)+\cdots+f(19)$

$=0+f(19)=-1$

**8.** 다음 그림과 같이 모든 모서리의 합이 28 cm, 겉넓이가 $28\text{cm}^2$, 부피가 $8\text{cm}^3$ 인 직육면체가 있다. 이 직육면체에서 면을 따라 꼭지점 A에서 꼭짓점 B에 이르는 가장 짧은 거리는?




① 5cm ② 6cm ③ $2\sqrt{5}$cm

④ $\sqrt{29}$cm ⑤ $\sqrt{37}$cm

**해설**

각 모서리의 길이를 $a$, $b$, $c$ 라 하면

$4(a+b+c)=28$

$2(ab+bc+ca)=28$

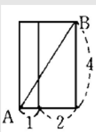
$abc=8$

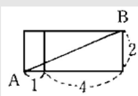
$\therefore\ a+b+c=7$

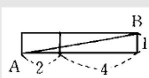
$ab+bc+ca=14$

$abc=8$

이 때, $a$, $b$, $c$ 를 세 근으로 하는 $x$ 에 대한 삼차방정식은 $x^3-7x^2+14x-8=0$ $(x-1)(x-2)(x-4)=0$ 그러므로 모서리의 길이는 각각 1cm , 2cm , 4cm 이다. 이제 꼭짓점 A 에서 꼭지점 B에 이르는 거리를전개도를 이용하여 구해 보자.

( i ) 


( ii ) 


(iii) 


( i ) 에서 $\overline{AB}=\sqrt{3^2+4^2}=5(\text{cm})$

( ii ) 에서 $\overline{AB}=\sqrt{5^2+2^2}=\sqrt{29}(\text{cm})$

(iii) 에서 $\overline{AB}=\sqrt{6^2+1^2}=\sqrt{37}(\text{cm})$

따라서 A 에서 B 에 이르는 가장 짧은 거리는 5cm