

1. 다음 집합 중에서 조건제시법을 원소나열법으로, 원소나열법을 조건제시법으로 바르게 나타낸 것은? (정답 2개)

① $A = \{x \mid x \text{는 홀수}\} = \{1, 3, 6, \dots\}$

② $A = \{x \mid x \text{는 } 10 \text{의 약수}\} = \{1, 2, 4, 8, \dots\}$

③ $\{x \mid x \text{는 } 30 \text{보다 작은 소수}\} = \{2, 3, 5, 7, \dots, 23, 29\}$

④ $\{3, 6, 9, 12\} = \{x \mid x \text{는 } 10 \text{ 이하의 } 3 \text{의 배수}\}$

⑤ $\{1, 3, 5, 7, \dots, 99\} = \{x \mid x \text{는 } 100 \text{ 이하의 홀수}\}$

해설

① $\{1, 3, 5, \dots\}$

② $\{1, 2, 5, 10\}$

④ $\{x \mid x \text{는 } 12 \text{ 이하의 } 3 \text{의 배수}\}$

2. 자연수 k 의 양의 배수의 집합을 A_k 라 할 때, 다음 중 $(A_6 \cup A_{12}) \cap (A_9 \cup A_{18})$ 과 같은 집합은?

① A_3

② A_6

③ A_9

④ A_{12}

⑤ A_{18}

해설

$A_6 = \{6, 12, 18, 24 \cdots\}$, $A_9 = \{9, 18, 27, 39 \cdots\}$, $A_{12} = \{12, 24, 36, 48 \cdots\}$, $A_{18} = \{18, 36, 54 \cdots\}$ 이므로 $(A_6 \cup A_{12}) \cap (A_9 \cup A_{18}) = A_6 \cap A_9 = A_{18}$

3. 5 개의 숫자 0, 1, 2, 3, 4 에서 서로 다른 4 개의 숫자를 택하여 양 끝이 홀수인 네 자리의 정수는 몇 개인가?

① 12

② 24

③ 36

④ 72

⑤ 120

해설

1000 자리의 숫자는 홀수 1, 3 중 하나를 택하므로

그 방법은 ${}_2P_1$ (가지)

또, 그 각각에 대하여 1 자리의 숫자는 1000 자리에 사용된 숫자를 제외한 나머지 숫자를 택하므로 그 방법은 ${}_1P_1$ (가지)

또, 100 자리와 10 자리의 숫자는 나머지 3 개의 숫자에서 2 개를 택하여 나열하면 되므로 그 방법은 ${}_3P_2$ (가지)

따라서, 양 끝이 홀수인 네 자리의 정수는 곱의 법칙에 의하여

$${}_2P_1 \times {}_3P_2 \times {}_1P_1 = 2 \times (3 \times 2) \times 1 = 12 \text{ (개)}$$

4. silent의 6개의 문자를 일렬로 배열할 때, 적어도 한쪽 끝에 모음이 오는 경우의 수는?

① 36

② 72

③ 144

④ 288

⑤ 432

해설

전체의 경우의 수에서 양쪽 끝 모두 자음이 오는 경우의 수를 빼준다.

$$6! - {}_4P_2 \times 4! = 432$$

5. 9 명의 야구 선수와 5 명의 농구 선수 중에서 3 명의 야구 선수와 2 명의 농구 선수를 뽑아 위원회를 구성하려고 한다. 야구 선수 중 특별한 두 명은 동시에 뽑히지 않게 하는 방법의 수를 구하면?

① 350

② 560

③ 770

④ 910

⑤ 1260

해설

(i) ㉠ 9 명의 야구 선수 중에서 특별한 두 명 중 한 명도 포함되지 않게 3 명의 위원을 뽑는 방법의 수는 7C_3

㉡ 9 명의 야구 선수 중에서 특별한 두 명 중 한 명은 위원회에 포함되게 3 명의 위원을 뽑는 방법의 수는 $2 \times {}^7C_2$

(ii) 5 명의 농구 선수 중 2 명을 뽑는 방법의 수는 ${}_5C_2$

(i), (ii)에서

$$({}^7C_3 \times {}_5C_2) + ({}^7C_2 \times {}_5C_2 \times 2) = 10 \times (35 + 42) = 770$$

6. 5 명의 남자와 4 명의 여자로 구성되어 있는 모임에서 임의로 3 명을 뽑을 때, 그 중에 남자 2 명, 여자 1 명을 포함하고 남자들이 이웃하게 서는 방법의 수는?

① 40

② 60

③ 80

④ 120

⑤ 160

해설

남자 5명, 여자 4명에서 남자 2명, 여자 1명을 뽑는 방법의 수는 ${}_5C_2 \times {}_4C_1$ 이고
남자 2명과 여자 1명이 일렬로 서는데 남자가 이웃하게 서는 방법의 수는 $2! \times 2$ 이므로
구하는 방법의 수는 ${}_5C_2 \times {}_4C_1 \times 2! \times 2 = 160$

7. 원에 내접하는 칠각형에 대하여 대각선은 모두 몇 개를 그을 수 있는가?

① 7

② 12

③ 14

④ 35

⑤ 38

해설

7 개의 점에서 2 개를 택하는 조합

$$\therefore {}_7C_2 = \frac{7!}{5!2!} = 21$$

이 때, 7 각형의 변의 개수는 빼줘야 하므로

$$\therefore 21 - 7 = 14 \text{ 개}$$

8. 다음 중에서 전체집합 U 의 두 부분집합 A, B 에 대하여 $(A \cup B) \cap (A \cap B)^c = B - A$ 이 성립하기 위한 A, B 사이의 관계는 ?

① $A \subset B$

② $A = B$

③ $B \subset A$

④ $A \cap B = \emptyset$

⑤ $A \cup B = \emptyset$

해설

$$(A \cup B) \cap (A \cap B)^c = (A \cup B) - (A \cap B) = (A - B) \cup (B - A) \\ = B - A$$

$$\therefore A - B = \emptyset \rightarrow A \subset B$$

9. 두 조건 p, q 가 $p : |x| < a, q : |x - 1| \geq 3$ 과 같이 주어져 있다. 명제 $\sim p \rightarrow q$ 가 참일 때, 양수 a 의 범위를 구하면?

① $0 < a \leq 4$

② $a > 4$

③ $a \geq 4$

④ $a > 2$

⑤ $2 \leq a \leq 4$

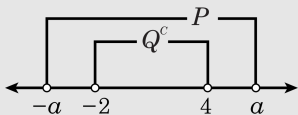
해설

$$\sim p \rightarrow q \Rightarrow \sim q \rightarrow p \Rightarrow Q^c \subset P$$

$$P = \{x | -a < x < a\}$$

$$Q = \{x | x \leq -2 \text{ 또는 } x \geq 4\}$$

$$Q^c = \{x | -2 < x < 4\}$$



$$-a \leq -2 \rightarrow a \geq 2, a \geq 4$$

$$\therefore a \geq 4$$

10. 두 조건 p, q 를 만족하는 집합을 각각 P, Q 라 하자. p 가 q 이기 위한 충분조건이지만 필요조건은 아닐 때, 다음 중 옳지 않은 것은?

① $Q^c \cap P^c = Q^c$

② $P - Q = \emptyset$

③ $P \cup Q = Q$

④ $Q - P = \emptyset$

⑤ $P \cap Q = P$

해설

p 가 q 이기 위한 충분조건이므로 $P \subset Q$

p 가 q 이기 위한 필요조건이 아니므로 $Q \not\subset P$

$\therefore Q - P \neq \emptyset$

11. 다음은 “실수를 계수로 갖는 세 개의 이차방정식 $ax^2 + 2bx + c = 0$, $bx^2 + 2cx + a = 0$, $cx^2 + 2ax + b = 0$ 중 적어도 하나는 실근을 갖는다”는 것을 증명한 것이다. 위의 증명에서 (가), (나), (다)에 알맞는 부등호를 차례대로 쓰면?

증명

주어진 방정식이 모두 허근을 갖는다고 가정하면

$$b^2 - ac \text{ (가) } 0, c^2 - ab \text{ (나) } 0, a^2 - bc \text{ (다) } 0$$

세 식을 같은 변끼리 더하면

$$a^2 + b^2 + c^2 - ab - bc - ac \text{ (나) } 0$$

좌변을 변형하면

$$a^2 + b^2 + c^2 - ab - bc - ac$$

$$= \frac{1}{2} \{ (a-b)^2 + (b-c)^2 + (c-a)^2 \} \text{ (나) } 0 \cdots \textcircled{7}$$

그런데 a, b, c 는 실수이므로

$$(a-b)^2 + (b-c)^2 + (c-a)^2 \text{ (다) } 0 \cdots \textcircled{8}$$

따라서, $\textcircled{8}$ 은 $\textcircled{7}$ 에 모순이므로 세 방정식 중 적어도 하나는 실근을 갖는다.

$\textcircled{1} <, <, \geq$

$\textcircled{2} <, <, >$

$\textcircled{3} <, >, <$

$\textcircled{4} \geq, \geq, \leq$

$\textcircled{5} \geq, \leq, \geq$

해설

주어진 방정식이 모두 허근을 갖는다면

$$b^2 - ac < 0, c^2 - ab < 0, a^2 - bc < 0 \text{ (가정)}$$

세 식을 같은 변끼리 더하면

$$a^2 + b^2 + c^2 - ab - bc - ac < 0$$

좌변을 변형하면

$$a^2 + b^2 + c^2 - ab - bc - ac$$

$$= \frac{1}{2} \{ (a-b)^2 + (b-c)^2 + (c-a)^2 \} < 0 \cdots \textcircled{7}$$

그런데 a, b, c 는 실수이므로

$$(a-b)^2 + (b-c)^2 + (c-a)^2 \geq 0 \cdots \textcircled{8}$$

따라서, $\textcircled{8}$ 은 $\textcircled{7}$ 에 모순이므로 세 방정식 중 적어도 하나는 실근을 갖는다.

12. 어느 해 A대 입시에서 전체 지원자 중 550명이 합격했다. 지원자의 남녀의 비가 8 : 5, 합격자의 남녀의 비가 7 : 4, 불합격자의 남녀의 비가 3 : 2라 할 때, 총 지원자의 수를 구하면?

① 1200

② 1250

③ 1300

④ 1350

⑤ 1400

해설

문제의 조건을 비례상수를 이용하여 다음과 같이 표로 만들어 보자.

	지원자의 수	합격자의 수	불합격자의 수
남	$8k$	$7s$	$3t$
여	$5k$	$4s$	$2t$

이때, $8k = 7s + 3t$, $5k = 4s + 2t$ 이고,

두 식에서 $k = 2s$

한편, $7s + 4s = 11s = 550$

$\therefore s = 50$

따라서, 총 지원자의 수는 $8k + 5k = 13k = 26s = 26 \times 50 = 1300(\text{명})$

13. 분수함수 $f(x) = \frac{ax+5}{bx+c}$ 의 그래프는 점 $(1,1)$ 을 지나고 점근선의 방정식이 $x = \frac{1}{2}, y = -\frac{1}{3}$ 이다. $f(x)$ 의 역함수를 $g(x)$ 라 할 때 $g(0)$ 은?

① $-\frac{1}{2}$

② $\frac{5}{2}$

③ 3

④ 4

⑤ $\frac{22}{5}$

해설

$$y = \frac{ax+5}{bx+c} \text{ 에서}$$

$$\text{점근선 } x = -\frac{c}{b} = \frac{1}{2}, y = \frac{a}{b} = -\frac{1}{3}$$

$(1, 1)$ 을 지나므로

$$1 = \frac{a+5}{b+c}$$

$$2c = -b, 3a = -b, c = -3$$

$$\therefore y = \frac{-2x+5}{6x-3}$$

$$y^{-1} = \frac{3x+5}{6x+2}$$

$$g(x) = \frac{3x+5}{6x+2}$$

$$\therefore g(0) = \frac{5}{2}$$

14. 함수 $y = \frac{ax+8}{x+b}$ 의 그래프의 점근선의 방정식이 $x = 6, y = -1$ 일 때, 함수 $y = \sqrt{bx-a}$ 의 정의역에 속하는 정수의 최댓값은? (단, a, b 는 상수이다.)

① -2

② -1

③ 0

④ 1

⑤ 2

해설

$$y = \frac{ax+8}{x+b} = \frac{8-ab}{x+b} + a \text{ 이고}$$

점근선의 방정식이 $x = -b = 6, y = a = -1$ 이므로 $a = -1, b = -6$

함수 $y = \sqrt{-6x+1}$ 의 정의역은 $\left\{x \mid x \leq \frac{1}{6}\right\}$ 이므로 구하는 정수의 최댓값은 0 이다.

15. 100원짜리 동전 3개, 50원짜리 동전 3개, 10원짜리 동전 3개를 가지고 지불할 수 있는 방법의 수를 a , 지불할 수 있는 금액의 수를 b 라 할 때, $a + b$ 의 값은?

① 98

② 102

③ 110

④ 115

⑤ 120

해설

동전을 사용하지 않는 것도 지불 방법이 되므로 각 동전을 사용하는 경우의 수는 $(3 + 1)$ 가지이다.

그러나, 금액이 모두 0원이면 지불방법이 되지 못하므로,

$\therefore (\text{지불 방법의 수}) = (3 + 1)(3 + 1)(3 + 1) - 1 = 63$ 지불 금액의 수는 금액이 중복되어 있으므로

100원짜리 동전 3개를 50원짜리 동전 6개로 바꿔 생각한다.

즉, 50원짜리 동전 9개와 10원짜리 동전 3개로 지불할 수 있는 경우의 수를 계산하면 된다.

$\therefore (\text{지불 금액의 수}) = (9 + 1)(3 + 1) - 1 = 39$

$\therefore a + b = 102$