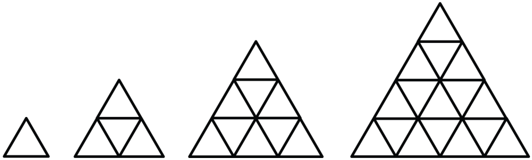
1. 정삼각형 모양의 타일을 이용하여 다음 그림과 같이 각 변의 길이가 처음 삼각형의 한 변의 길이의 2배, 3배, 4배, $\cdots$ 인 정삼각형 모양을 계속하여 만든다. 한 변의 길이가 처음 정삼각형의 한 변의 길이의 6배인 정삼각형을 만들 때, 필요한 타일의 개수는?



① 30개 ② 32개 ③ 34개 ④ 36개 ⑤ 38개

해설

타일의 개수를 $\{a_n\}$이라 하면

$a_1 = 1$

$a_2 = 4$

$a_3 = 9$

$\vdots$

$\therefore a_n = n^2$

$\therefore a_6 = 36$

2. 등차수열 $\{a_n\}$에 대하여 $(a_1 + a_2) : (a_3 + a_4) = 1 : 2$가 성립할 때, $a_1 : a_4$는?(단, $a_1 \neq 0$이다.)

① $1 : 2$ ② $1 : 3$ ③ $2 : 3$ ④ $2 : 5$ ⑤ $3 : 5$

해설

등차수열 $\{a_n\}$의 공차를 d라 하면

$(a_1 + a_2) : (a_3 + a_4)$

$= (a_1 + a_1 + d) : (a_1 + 2d + a_1 + 3d) = 1 : 2$

$2a_1 + 5d = 4a_1 + 2d \quad \therefore \; 2a_1 = 3d$

$\therefore \; a_1 : a_4 = a_1 : (a_1 + 3d) = a_1 : 3a_1 = 1 : 3$

3. 이차방정식 $x^2-6x+4=0$의 두 근을 α, β라 할 때, α, β의 등차중항을 구하여라.

▶ 답 :

▷ 정답 : 3

해설

근과 계수의 관계에 의하여 $\alpha+\beta=6$이므로 α,β의 등차중항은

$$\frac{\alpha+\beta}{2}=\frac{6}{2}=3$$

4. 등차수열 $\{a_n\}$에 대하여 $a_5 = 4a_3$, $a_2 + a_4 = 4$가 성립할 때, a_6의 값은?

① 5　② 8　③ 11　④ 13　⑤ 16

해설

a_2, a_3, a_4는 이 순서로 등차수열을 이루므로 $a_3 = \dfrac{a_2 + a_4}{2} = 2$

$\therefore\ a_5 = 4a_3 = 8$

이때, 공차를 d라 하면 $a_5 = a_3 + 2d$이므로

$8 = 2 + 2d \quad \therefore\ d = 3$

$\therefore\ a_6 = a_5 + d = 8 + 3 = 11$

5. $a_5 = 31,\ a_{11} = 13$ 인 등차수열 $\{a_n\}$에서 처음으로 음수가 되는 항은?

① a_{16} ② a_{17} ③ a_{18} ④ a_{19} ⑤ a_{20}

해설

$a_5 = a + 4d = 31$

$a_{11} = a + 10d = 13$

$6d = -18$

$d = -3$

$\therefore a = 31 + 4 \cdot 3 = 43$

$\therefore a_n = 43 + (n-1) \times (-3)$

$= -3n + 46$

$-3n + 46 < 0$ 인 정수 n의 최솟값을 구하면

$46 < 3n$

$15.\times\times < n$

$\therefore n = 16$

6. 두 수 2와 12 사이에 8개의 수를 넣어서 만든 수열 $2,\ a_1,\ a_2,\ \cdots,\ a_8,\ 12$가 이 순서대로 등차수열을 이룰 때, $a_1 + a_2 + \cdots + a_8$의 값을 구하여라.

▶ 답 :

▷ 정답 : 56

해설

$2 + a_1 + \cdots + a_8 + 12$

$= \dfrac{10(2+12)}{2} = 70$

$\therefore a_1 + \cdots + a_8 = 70 - 14 = 56$

7. 100 이하의 자연수 중에서 3으로 나누었을 때 나머지가 2인 수의 합은?

① 1600 ② 1620 ③ 1650 ④ 1680 ⑤ 1700

해설

조건을 만족시키는 자연수를 작은 수부터 차례로 나열하면
$2,\ 5,\ 8,\ \cdots,\ 98$이고 이것은 첫째항이 2, 공차가 3인 등차수열을 이룬다.
이 등차수열을 $\{a_n\}$이라 할 때, 일반항 a_n은
$a_n = 2 + (n-1) \times 3 = 3n - 1$
이때, 끝항 98은 $3n - 1 = 98$에서 $n = 33$이므로 98은 제 33 항이다.
따라서 구하는 합을 S라 하면

$$S = \frac{33(2+98)}{2} = 33 \cdot 50 = 1650$$

8. 첫째항이 45이고, 공차가 -4인 등차수열은 첫째항부터 제 몇 항까지의 합이 처음 음수가 되는가?

① 23 ② 24 ③ 25 ④ 26 ⑤ 27

해설

첫째항이 45이고, 공차가 -4인 등차수열의 첫째항부터 제 n항까지의 합은

$$\frac{n\{2\cdot 45+(n-1)\cdot(-4)\}}{2}=n(47-2n)$$

$n(47-2n)<0$에서 $n<0$ 또는 $n>\frac{47}{2}$

$n>0$이므로 $n>\frac{47}{2}=23.5$

따라서 주어진 수열은 첫째항부터 제 24항까지의 합이 처음으로 음수가 된다.

9. 다음 수열 $\{a_n\}$의 일반항 a_n은?

$$1, 4, 9, 16 \cdots$$

① n ② $3n-2$ ③ $2n+1$

④ n^2 ⑤ $(n+1)^2$

해설

$a_1 = 1,\ a_2 = 4 = 2^2,\ a_3 = 9 = 3^2,\ a_4 = 16 = 4^2, \cdots$

$\therefore a_n = n^2$

10. 등차수열 $\{a_n\}$에 대하여 $a_1 + a_2 = 11,\ a_3 + a_4 + a_5 = 54$가 성립할 때, a_{10}의 값은?

① 36 ② 39 ③ 42 ④ 45 ⑤ 48

해설

공차를 d라 하면 $a_1 + a_2 = 11$에서 $a_1 + \{a_1 + (2-1)d\} = 11$

$\therefore\ 2a_1 + d = 11 \cdots$ ㉠

$a_3 + a_4 + a_5 = 54$에서 $(a_1 + 2d) + (a_1 + 3d) + (a_1 + 4d) = 54$

$\therefore\ a_1 + 3d = 18 \cdots$ ㉡

㉠, ㉡을 연립하여 풀면 $a_1 = 3,\ d = 5$

$\therefore\ a_{10} = a_1 + 9d = 3 + 9 \times 5 = 48$

11. 등차수열 $-3,\ x_1,\ x_2,\ x_3,\ x_4,\ x_5,\ x_6,\ x_7,\ 21$ 에 대하여 $x_4 + x_5$ 의 값은?

① 15　　② 17　　③ 19　　④ 21　　⑤ 23

해설

주어진 등차수열의 공차를 d라고 하면 21은 제 9항이므로

$21 = -3 + 8d \quad \therefore\ d = 3$

따라서, 주어진 수열은 첫째항이 -3, 공차가 3인 등차수열이고,

$x_4,\ x_5$ 은 각각 제 5항, 제 6항이므로

$x_4 = -3 + (5-1)\cdot 3 = 9$

$x_5 = -3 + (6-1)\cdot 3 = 12$

따라서 $x_4 + x_5$ 은 21이다.

12. 두 수 $2p+1$과 $2p+5$의 등차중항이 p^2일 때, 양수 p의 값을 구하여라.

▶ 답 :

▷ 정답 : 3

해설

$2p+1$, p^2, $2p+5$가 등차수열을 이루므로 $p^2 = \dfrac{(2p+1)+(2p+5)}{2}$

$2p^2 = 4p+6$, $p^2-2p-3=0$

$(p+1)(p-3)=0$

따라서 $p=-1$ 또는 $p=3$

이때, p는 양수이므로 $p=3$

13. 등차수열을 이루는 세 수의 합이 12이고, 곱이 28일 때, 세 수 중 가장 큰 수는?

① 5　② 6　③ 7　④ 8　⑤ 9

해설

등차수열을 이루는 세 수를 $a-b,\ a,\ a+b$라 하면 세 수의 합이 12이므로

$(a-b)+a+(a+b)=12,\ 3a=12$

$\therefore a=4$

또한 세 수의 곱이 28이므로

$(4-d)\times 4\times(4+d)=28,\ 16-d^2=7$

$d^2=9\ \ \therefore d=\pm 3$

따라서 구하는 세 수는 $1, 4, 7$이므로 이 중 가장 큰 수는 7이다.

14. $a_5 = 27,\ a_{11} = 15$ 인 등차수열 $\{a_n\}$에서 처음으로 음수가 되는 항은?

① a_{16} ② a_{17} ③ a_{18} ④ a_{19} ⑤ a_{20}

해설

$a_5 = a + 4d = 27$

$a_{11} = a + 10d = 15$

연립하여 풀면 $d = -2,\ a = 35$

$\therefore\ a_n = 35 + (n-1) \times (-2) = -2n + 37$

$-2n + 37 < 0$ 인 정수 n의 최솟값을 구하면

$37 < 2n, \quad 18.5 < n$

$\therefore\ n = 19$

$\therefore\ \{a_n\}$에서 처음으로 음수가 되는 항은 a_{19}이다.

15. 등차수열 30, x_1, x_2, $x_3, \cdots$, x_n, -10의 합이 210이 되도록 공차 d의 값을 정하여라.

▶ **답 :**

▷ **정답 :** -2

해설

첫째항이 30, 끝항이 -10이고 항수가 $n+2$인 등차수열의 합이 210이므로

$$\frac{(n+2)\{30+(-10)\}}{2}=210$$

$n+2=21 \quad \therefore \ n=19$

따라서 끝항은 주어진 수열의 제 21항이므로

$-10=30+(21-1)d \quad \therefore \ d=-2$

16. 첫째항부터 제 n항까지의 합이 $S_n = n^2 - n$으로 표시되는 수열 $\{a_n\}$에서 a_{10}의 값은?

① 12　　② 14　　③ 16　　④ 18　　⑤ 20

해설

(i) $n \geq 2$일 때

$a_n = S_n - S_{n-1}$

$= (n^2 - n) - \{(n-1)^2 - (n-1)\}$

$= 2n - 2$

(ii) $n = 1$일 때, $a_1 = S_1 = 1^2 - 1 = 0$

(i), (ii)에서 $a_n = 2n - 2 \ (n \geq 1)$

$\therefore a_{10} = 2 \cdot 10 - 2 = 18$

17. 첫째항부터 제n항까지의 합 $S_n = n^2 + 3n$인 수열 $\{a_n\}$에 대하여 $a_1 + a_5 + a_{10}$의 값은?

① 32 ② 34 ③ 36 ④ 38 ⑤ 40

해설

주어진 수열의 합을 이용하여 수열의 일반항을 구한다.

$n \geq 2$일 때,

$a_n = S_n - S_{n-1}$

$= n^2 + 3n - \{(n-1)^2 + 3(n-1)\}$

$= 2n + 2 \cdots\cdots$ ㉠

$n = 1$일 때, $a_1 = S_1 = 1^2 + 3 \cdot 1 = 4$

이것은 ㉠에 $n = 1$을 대입하여 얻은 값과 같으므로 수열 $\{a_n\}$의 일반항은 $a_n = 2n + 2$

$\therefore a_1 + a_5 + a_{10} = 4 + 12 + 22 = 38$

18. 첫째항이 100이고, 공차가 -3인 등차수열은 첫째항부터 몇 째항까지의 합이 최대가 되는지 구하여라.

▶ **답 :**

▷ **정답 :** 34번째 항

해설

$a_n = 100 + (n-1)\cdot(-3)$

$= -3n + 103 > 0$

$n < 34.333\cdots$

$\therefore n = 34$일 때 최대

19. 다음 ( ) 안에 알맞은 수는?

$$\frac{\sqrt{3}}{1},\ \frac{\sqrt{5}}{4},\ \frac{\sqrt{7}}{9},\ (\qquad),\ \frac{\sqrt{11}}{25}$$

① $\frac{\sqrt{7}}{12}$ ② $\frac{\sqrt{3}}{12}$ ③ $\frac{3}{16}$ ④ $\frac{3\sqrt{2}}{16}$ ⑤ $\frac{3\sqrt{2}}{18}$

해설

나열된 각 수는 분수 꼴이며, 분자는 $\sqrt{+2}$의 규칙으로 나타난다.
따라서 ( ) 안에 들어갈 수의 분자는 $\sqrt{7+2}=\sqrt{9}=3$이다.
분모는 $+1$이 된 수의 제곱의 규칙으로 나타난다.
따라서 ( ) 안에 들어갈 수의 분모는 $(3+1)^2=16$이므로 ( )
안에 들어갈 수는 $\frac{3}{16}$

20. 다음 ( ) 안에 알맞은 것은?

$1-2i,\ 2-4i,\ 3-8i,\ 4-16i,\ (\quad),\cdots$

① $5-18i$ ② $5-20i$ ③ $5-24i$

④ $5-32i$ ⑤ $5-64i$

해설

주어진 복소수의 배열을

$a_1+b_1i,\ a_2+b_2i,\ a_3+b_3i,\ a_4+b_4i,\cdots$ 와 같이 생각한다면

(단, $a_k,\ b_k$는 실수)

수열 $\{a_n\}$의 배열은 $1,\ 2,\ 3,\ 4,\ (\quad),\ \cdots$ 이고

수열 $\{b_n\}$의 배열은 $-2,\ -4,\ -8,\ -16,\ (\quad),\ \cdots$ 이다.

따라서 구하는 것은 다섯 번째 수이므로 $5-32i$이다.