

1. 두 다항식 $(1+x+x^2+x^3)^3$, $(1+x+x^2+x^3+x^4)^3$ 의 x^3 의 계수를 각각 a , b 라 할 때, $a-b$ 의 값은?

① $4^3 - 5^3$

② $3^3 - 3^4$

③ 0

④ 1

⑤ -1

해설

두 다항식이 $1+x+x^2+x^3$ 을 포함하고 있으므로 $1+x+x^2+x^3 = A$ 라 놓으면

$$(1+x+x^2+x^3+x^4)^3$$

$$= (A+x^4)^3$$

$$= A^3 + 3A^2x^4 + 3Ax^8 + x^{12}$$

$$= A^3 + (3A^2 + 3Ax^4 + x^8)x^4$$

이 때 $(3A^2 + 3Ax^4 + x^8)x^4$ 은 x^3 항을 포함하고 있지 않으므로 두 다항식의 x^3 의 계수는 같다.

$$\therefore a-b=0$$

2. $x+y+z=4$, $xy+yz+zx=1$, $xyz=2$ 일 때, $(xy+yz)(yz+zx)(zx+xy)$ 의 값을 구하면?

- ① 16 ② 8 ③ 4 ④ 2 ⑤ 1

해설

$(xy+yz)(yz+zx)(zx+xy)$ 을
 $xy+yz+zx=1$ 을 이용하여 변형하면
 $(xy+yz)(yz+zx)(zx+xy)$
 $= (1-zx)(1-xy)(1-yz)$
 $= 1 - (xy+yz+zx) + (x^2yz+xy^2z+xyz^2) - (xyz)^2$
 $= 1 - (xy+yz+zx) + xyz(x+y+z) - (xyz)^2$
 $= 1 - 1 + 2 \cdot 4 - 4$
 $= 4$

※ 위에서 아래의 전개식을 이용하였다.

$(x-a)(x-b)(x-c)$
 $= x^3 - (a+b+c)x^2 + (ab+bc+ca)x - abc$

3. 세 변의 길이가 a, b, c 인 $\triangle ABC$ 에 대하여 $a^2 - ab + b^2 = (a + b - c)c$ 인 관계가 성립할 때, $\triangle ABC$ 는 어떤 삼각형인지 구하여라.

▶ 답 :

▷ 정답 : 정삼각형

해설

$$a^2 - ab + b^2 = (a + b - c)c \text{에서 } a^2 - ab + b^2 = ac + bc - c^2$$

$$a^2 + b^2 + c^2 - ab - bc - ca = 0$$

$$\text{즉, } \frac{1}{2} \left\{ (a - b)^2 + (b - c)^2 + (c - a)^2 \right\} = 0$$

$$\therefore a = b = c$$

따라서, $\triangle ABC$ 는 정삼각형이다.

4. $a + b = 4$, $a^2 + b^2 = 10$ 일 때, $a^5 + b^5$ 의 값을 구하여라.

▶ 답 :

▷ 정답 : 244

해설

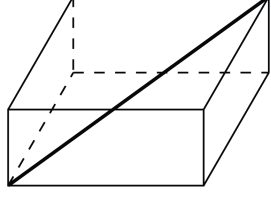
$$a + b = 4, a^2 + b^2 = 10$$

$$ab = \frac{1}{2}((a + b)^2 - (a^2 + b^2)) = 3$$

$$a^3 + b^3 = (a + b)^3 - 3ab(a + b) = 28$$

$$\begin{aligned}\therefore a^5 + b^5 &= (a^3 + b^3)(a^2 + b^2) - a^2b^2(a + b) \\ &= 28 \times 10 - 9 \times 4 \\ &= 244\end{aligned}$$

5. 다음 그림과 같이 대각선의 길이가 3이고 겹넓이가 16, 부피가 6인 직육면체가 있다. 이 직육면체의 가로, 세로, 높이를 각각 a , b , c 라 할 때, $a^3 + b^3 + c^3$ 의 값은?



- ① 12 ② 18 ③ 21 ④ 23 ⑤ 30

해설

$$\begin{aligned} \sqrt{a^2 + b^2 + c^2} &= 3, \quad abc = 6, \quad 2(ab + bc + ca) = 16 \\ (a + b + c)^2 &= a^2 + b^2 + c^2 + 2(ab + bc + ca) \\ (a + b + c)^2 &= 25, \quad a + b + c = 5 (\because a, b, c \text{는 양수}) \\ a^3 + b^3 + c^3 - 3abc &= (a + b + c)(a^2 + b^2 + c^2 - ab - bc - ca) \cdots \textcircled{1} \\ \textcircled{1} \text{에 각각 대입하면} \\ a^3 + b^3 + c^3 - 18 &= 5 \times (9 - 8) \\ a^3 + b^3 + c^3 &= 23 \end{aligned}$$