1. $x^2-2\sqrt{2}x+2=0$을 풀면?

① $x=-\sqrt{2}$ ② $x=\sqrt{2}$ ③ $x=0$

④ $x=4-\sqrt{2}i$ ⑤ $x=6$

해설

$x^2-2\sqrt{2}x+(\sqrt{2})^2=(x-\sqrt{2})^2=0$

$\therefore\ x=\sqrt{2}$

2. x에 대한 이차방정식 $kx^2+(2k+1)x+6=0$의 해가 2, α일 때, $k+\alpha$의 값을 구하면?

① -1 ② -2 ③ -3 ④ -4 ⑤ -5

해설

해가 $2, \alpha$라면 방정식에 2를 대입하면 0이 된다.

$k \cdot 2^2 + (2k+1)2 + 6 = 0$

$4k + 4k + 8 = 0$에서 $k = -1$

$k = -1$을 방정식에 대입하고 α를 구한다.

$-x^2 - x + 6 = 0,\ x^2 + x - 6 = 0$

$(x+3)(x-2) = 0,\ x = 2, -3$

$\therefore k = -1,\ \alpha = -3$

$\therefore\ k + \alpha = -4$

3. 이차방정식 $x^2 - px + 2p + 1 = 0$이 중근을 갖도록 하는 실수 p의 값을 모두 곱하면?

① -8 ② -4 ③ 1 ④ 4 ⑤ 8

해설

$$D = p^2 - 4(2p+1)$$
$$= p^2 - 8p - 4 = 0$$

판별식으로부터 나온 p에 대한 방정식의 근들이 주어진 식이 중근을 갖게 하므로

실수 p 값들의 곱은 근과 계수의 관계에서 -4이다.

4. 이차방정식 $x^2+2x+k-3=0$이 서로 다른 두 실근을 가질 때, 정수 k의 최대값은?

① -1 ② 0 ③ 1 ④ 2 ⑤ 3

해설

서로 다른 두 실근을 갖으려면 판별식이 0보다 커야 한다.

$D' = 1^2-(k-3)>0$

$\therefore \ k<4$

$\therefore$ 최댓값은 3 ($\because$ k는 정수)

5. 이차방정식 $3x^2 - 6x + k = 0$이 허근을 갖도록 실수 k의 범위를 정하면?

① $k \le 3$ ② $k > 3$ ③ $k \le 2$ ④ $k > 2$ ⑤ $k < 1$

해설

이차방정식이 허근을 가질 조건 : $D < 0$

$3x^2 - 6x + k = 0$

$$\frac{D}{4} = 9 - 3k < 0$$

$\therefore\ k > 3$

6. 계수가 실수인 x에 대한 이차방정식 $x^2+2(a-m-1)x+a^2-b+m^2=0$의 근이 m의 값에 관계없이 항상 중근을 갖도록 하는 a, b값의 합은?

① -2　② -1　③ 0　④ 1　⑤ 2

해설

$$\frac{D}{4}=(a-m-1)^2-(a^2-b+m^2)=0$$

m의 값에 관계없이

$2(-a+1)m+(-2a+b+1)=0$

이어야 하므로

$2(-a+1)=0,\ -2a+b+1=0$

$\therefore a=1,\ b=1$

$\therefore a+b=2$

7. 이차식 $ax^2+4x+2a$가 x에 대한 완전제곱식이 되도록 하는 실수 a의 값은?

① ± 1 ② $\pm\sqrt{2}$ ③ ± 2 ④ $\pm\sqrt{3}$ ⑤ $\pm\sqrt{5}$

해설

주어진 식이 x에 대한 완전제곱식이 되려면
판별식 $D=0$이어야 한다.

$$\frac{D}{4}=2^2-a\cdot 2a=0$$

$$4-2a^2=0,\ a^2=2$$

$$\therefore a=\pm\sqrt{2}$$

8. 이차방정식 $x^2+(a+1)x+a-5=0$의 두 실근을 β, β^2이라 할 때, $a+\beta+\beta^2$의 값은?

① -3　② -1　③ 0　④ 1　⑤ 3

해설

두 근의 합은 $\beta+\beta^2=-a-1$이므로

$a+\beta+\beta^2=a-a-1=-1$

9. 이차방정식 $2x^2-6x+1=0$의 두 근을 α,β라 할 때, $\alpha+\beta$, $\alpha\beta$를 두 근으로 하는 이차방정식은?

① $2x^2-6x+1=0$
② $x^2-6x+1=0$
③ $x^2-7x+3=0$
④ $2x^2+6x-1=0$
⑤ $2x^2-7x+3=0$

해설

근과 계수의 관계에서

$\alpha+\beta=\dfrac{6}{2}=3$, $\alpha\beta=\dfrac{1}{2}$ 이므로

3 과 $\dfrac{1}{2}$ 을 이용한 근과 계수의 관계를 구해보면

$3+\dfrac{1}{2}=\dfrac{7}{2}$, $3\times\dfrac{1}{2}=\dfrac{3}{2}$

$\therefore\ x^2-\dfrac{7}{2}x+\dfrac{3}{2}=0$

$\therefore\ 2x^2-7x+3=0$

10. 이차식 x^2+2x+4 를 일차식의 곱으로 인수분해 하여라.

① $(x+1-\sqrt{3}i)(x+1+\sqrt{3}i)$

② $(x+1-\sqrt{3})(x+1+\sqrt{3})$

③ $(x+1-\sqrt{2}i)(x+1+\sqrt{2}i)$

④ $(x+1-\sqrt{2})(x+1+\sqrt{2})$

⑤ $(x-1-\sqrt{2}i)(x-1+\sqrt{2}i)$

해설

$x^2+2x+4=0$ 의 해를 구하면

$x=-1\pm\sqrt{1-4}=-1\pm\sqrt{3}i$

$\therefore x^2+2x+4$

$=\left\{x-(-1+3\sqrt{i}\right\}\left\{x-(-1-\sqrt{3}i)\right\}$

$=(x+1-\sqrt{3}i)(x+1+\sqrt{3}i)$

11. 이차방정식 $(\sqrt{2}-1)x^2-(3-\sqrt{2})x+\sqrt{2}=0$의 두 근은?

① $\sqrt{2},\ 1+\sqrt{2}$　② $-\sqrt{2},\ 1+\sqrt{2}$　③ $\sqrt{2},\ 1-\sqrt{2}$

④ $-\sqrt{2},\ -1-\sqrt{2}$　⑤ $\sqrt{2},\ -1+\sqrt{2}$

해설

양변에 $\sqrt{2}+1$을 곱하면

$x^2-(2\sqrt{2}+1)x+\sqrt{2}(\sqrt{2}+1)=0$

$(x-\sqrt{2})\left\{x-(\sqrt{2}+1)\right\}=0$

$\therefore x=\sqrt{2},\ \sqrt{2}+1$

해설

$x^2-(2\sqrt{2}+1)x+\sqrt{2}(\sqrt{2}+1)=0$로 고친 후 근의 공식을 이용하여 풀어도 좋다.

12. 이차방정식 $x^2-4|x|-5=0$의 두 근의 곱은?

① -5 ② -10 ③ -15 ④ -20 ⑤ -25

해설

i) $x \geq 0$일 때,

$x^2-4x-5=(x-5)(x+1)=0$

$\therefore x=5$

ii) $x<0$일 때,

$x^2+4x-5=(x+5)(x-1)=0$

$\therefore x=-5$

i), ii)에서 두 근의 곱은 -25이다.

13. 방정식 $x^2 - [x] - 4 = 0\ (0 < x < 4)$의 모든 근의 합은?

① $2\sqrt{6}$ ② $\sqrt{10}$ ③ 3 ④ $\sqrt{7}$ ⑤ $\sqrt{6}$

해설

이차방정식 $x^2 - [x] - 4 = 0$에서

(i) $0 < x < 1$일 때, $[x] = 0$이므로

$x^2 - 4 = 0, (x+2)(x-2) = 0$

$\therefore x = -2$ 또는 $x = 2$

그런데 $0 < x < 1$이므로 해가 없다.

(ii) $1 \le x < 2$일 때, $[x] = 1$이므로

$x^2 - 5 = 0,\ (x+\sqrt{5})(x-\sqrt{5}) = 0$

$\therefore x = -\sqrt{5}$ 또는 $x = \sqrt{5}$

그런데 $1 \le x < 2$이므로 해가 없다.

(iii) $2 \le x < 3$일 때, $[x] = 2$이므로

$x^2 - 6 = 0,\ (x+\sqrt{6})(x-\sqrt{6}) = 0$

$\therefore x = -\sqrt{6}$ 또는 $x = \sqrt{6}$

그런데 $2 \le x < 3$이므로 $x = \sqrt{6}$

(iv) $3 \le x < 4$일 때, $[x] = 3$이므로

$x^2 - 7 = 0,\ (x+\sqrt{7})(x-\sqrt{7}) = 0$

$\therefore x = -\sqrt{7}$ 또는 $x = \sqrt{7}$

그런데 $3 \le x < 4$이므로 해가 없다.

따라서 모든 근의 합은 $\sqrt{6}$

14. 0 이 아닌 두 실수 a, b에 대하여 $\frac{\sqrt{b}}{\sqrt{a}} = -\sqrt{\frac{b}{a}}$가 성립할 때, <보기>의 방정식 중 항상 실근이 존재하는 것을 모두 고른 것은?

보 기

㉠ $x^2 + ax + b = 0$	㉡ $x^2 + bx + a = 0$
㉢ $ax^2 + x + b = 0$	㉣ $bx^2 + ax + b = 0$

① ㉠, ㉡ ② ㉠, ㉣ ③ ㉡, ㉢ ④ ㉡, ㉣ ⑤ ㉢, ㉣

해설

$\frac{\sqrt{b}}{\sqrt{a}} = -\sqrt{\frac{b}{a}}$ 이 만족하려면 $b > 0, a < 0$

㉠ $x^2 + ax + b = 0,\ D = a^2 - 4b$

$b \le \frac{a^2}{4}$ 일 때만 실근 존재

㉡ $x^2 + bx + a = 0$

$D = b^2 - 4a > 0$ 항상 실근 존재 (○)

㉢ $ax^2 + x + b = 0$

$D = 1 - 4ab > 0$ 항상 실근 존재 (○)

㉣ $bx^2 + ax + b = 0$

$D = a^2 - 4b^2,\ a^2 \ge 4b^2$ 일 때만 실근 존재

15. $x^2+2\sqrt{\frac{1}{a}+\frac{1}{b}+\frac{1}{c}}x+\frac{1}{\sqrt{ab}}+\frac{1}{\sqrt{bc}}+\frac{1}{\sqrt{ca}}=0$의 근을 판별하면? (단, a, b, c는 서로 다른 양의 실수이다.)

① 서로 다른 두 허근

② 서로 다른 두 실근

③ 서로 같은 두 실근

④ 서로 다른 두 허근

⑤ 한 근은 실근, 한 근은 허근

해설

$$\frac{D}{4}=\frac{1}{a}+\frac{1}{b}+\frac{1}{c}-\frac{1}{\sqrt{ab}}-\frac{1}{\sqrt{bc}}-\frac{1}{\sqrt{ca}}$$

$$=\left(\frac{1}{\sqrt{a}}\right)^2+\left(\frac{1}{\sqrt{b}}\right)^2+\left(\frac{1}{\sqrt{c}}\right)^2-\frac{1}{\sqrt{ab}}-\frac{1}{\sqrt{bc}}-\frac{1}{\sqrt{ca}}$$

$$=\frac{1}{2}\left\{\left(\frac{1}{\sqrt{a}}-\frac{1}{\sqrt{b}}\right)^2+\left(\frac{1}{\sqrt{b}}-\frac{1}{\sqrt{c}}\right)^2+\left(\frac{1}{\sqrt{c}}-\frac{1}{\sqrt{a}}\right)^2\right\}>0$$

따라서 서로 두 실근을 갖는다.

(단, $\frac{1}{\sqrt{a}}=\frac{1}{\sqrt{b}}=\frac{1}{\sqrt{c}}$일 때 중근)

16. 이차방정식 $2x^2-4x-3k=0$ 이 허근을 갖고, 동시에 $x^2+5x-2k=0$ 이 실근을 갖도록 하는 정수 k 의 개수를 구하면?

① 1개　② 2개　③ 3개　④ 4개　⑤ 5개

해설

$2x^2-4x-3k=0$ 이 허근을 가질 조건은

$$\frac{D}{4}=4+6k<0$$

$$\therefore\ k<-\frac{2}{3}\quad\cdots\cdots ㉠$$

$x^2+5x-2k=0$ 이 실근을 가질 조건은

$D=25+8k\geq 0$

$$\therefore\ k\geq-\frac{25}{8}\quad\cdots\cdots ㉡$$

㉠, ㉡에서 $-\frac{25}{8}\leq k<-\frac{2}{3}$

따라서, 정수 $k=-3,\ -2,\ -1$

$\therefore$ 정수 k 의 개수는 3개

17. x에 대한 다음 방정식의 두 근의 합은?

$$(\sqrt{3}+1)x^2+(\sqrt{3}+1)x-2\sqrt{3}=0$$

① $-\sqrt{3}$ ② -1 ③ 0 ④ 1 ⑤ $\sqrt{3}$

해설

주어진 방정식의 좌변을 인수분해하면

$\{(\sqrt{3}+1)x-2\}(x+\sqrt{3})=0$

$\therefore\ x=\dfrac{2}{\sqrt{3}+1}$ 또는 $x=-\sqrt{3}$

$\therefore\ x=\sqrt{3}-1$ 또는 $x=-\sqrt{3}$

$\therefore\ \sqrt{3}-1+(-\sqrt{3})=-1$

18. x에 대한 2차 방정식 $x^2 - ax + 4 = 0$의 한근이 $1 + \sqrt{5}$일 때, a의 값은?

① $2\sqrt{5}$ ② $2\sqrt{3}$ ③ 2 ④ -2 ⑤ 0

해설

다른 한 근을 α라 하면
두 근의 곱은 $(1 + \sqrt{5})\alpha = 4$
따라서 $\alpha = -1 + \sqrt{5}$
$\therefore$두 근의 합은 $(1 + \sqrt{5}) + (-1 + \sqrt{5}) = a$
$\therefore a = 2\sqrt{5}$

19. 서현이와 주현이가 이차방정식 $x^2+ax+b=0$을 함께 풀었다. 그런데 서현이는 a를 잘못 보고 풀어서 두 근 1, 3을 얻었고, 주현이는 b를 잘못 보고 풀어서 두 근 -1, -4를 얻었다. 이 때, 처음 이차방정식은?

① $x^2-5x+3=0$

② $x^2+5x+3=0$

③ $x^2+5x+13=0$

④ $x^2+5x-13=0$

⑤ $x^2+5x+15=0$

해설

서현이가 잘못 본 일차항의 계수 a를 a',
주현이가 잘못 본 상수항 b를 b'이라 하자.
$x^2+a'x+b=0$의 두 근이 1, 3이므로
$b=1\times 3=3$
$x^2+ax+b'=0$의 두 근이 -1, -4이므로
$-a=(-1)+(-4)=-5$
$\therefore\ a=5$
따라서 처음의 이차방정식은 $x^2+5x+3=0$