1. 다음 명제 중 옳은 것을 모두 고르면?

① -1의 세제곱근 중 허수는 한 개뿐이다.

② $-\sqrt{3}$의 세제곱근 중 실수는 $-\sqrt[3]{3}$이다.

③ $\sqrt{2}$의 네제곱근 중 실수는 $-\sqrt[8]{2}$와 $\sqrt[8]{2}$뿐이다.

④ -10의 n제곱근(n은 홀수) 중 실수인 것은 한 개뿐이다.

⑤ $(\sqrt[3]{-3})^9 = -\sqrt[3]{3}$

해설

① -1의 세제곱근 중 실수 1개와 허수2개가 있다. (거짓)

② $-\sqrt{3}$의 세제곱근 중 실수는 $-\sqrt[3]{\sqrt{3}}$이다. (거짓)
③ n이 홀수일 때, -10의 n제곱근 중 실수인 것은$\sqrt[n]{-10}$, 즉 한개이다. (참)

⑤ $(\sqrt[3]{-3})^9 = \left\{(\sqrt[3]{-3})^3\right\}^3 = (-3)^3 = -27$ (거짓)

따라서 옳은 것은 ③, ④이다.

2. $(\sqrt[3]{3}+\sqrt[3]{2})(\sqrt[3]{9}-\sqrt[3]{6}+\sqrt[3]{4})$의 값은?

① 3 ② 4 ③ 5 ④ 6 ⑤ 7

해설

$\sqrt[3]{3}=a$, $\sqrt[3]{2}=b$라고 하면

$(\sqrt[3]{3}+\sqrt[3]{2})(\sqrt[3]{9}-\sqrt[3]{6}+\sqrt[3]{4})$

$=(a+b)(a^2-ab+b^2)$

$=a^3+b^3$

$=3+2=5$

3. 서로소인 두 자연수 a, b에 대하여 $\dfrac{\sqrt{\sqrt{3}}}{\sqrt{3}} \times \sqrt[3]{3} = 3^{\frac{b}{a}}$ 일 때, $a+b$의 값을 구하여라.

▶ 답 :

▷ 정답 : 13

해설

$$\frac{\sqrt{\sqrt{3}}}{\sqrt{3}} \times \sqrt[3]{3} = \frac{3^{\frac{1}{4}}}{3^{\frac{1}{2}}} \times 3^{\frac{1}{3}} = 3^{\frac{1}{4}-\frac{1}{2}+\frac{1}{3}} = 3^{\frac{1}{12}}$$

따라서 $a+b=13$이다.

4. 세 수 $\sqrt[3]{3^2\sqrt{2}}$, $\sqrt{2}\sqrt[3]{3}$, $\sqrt[3]{2}\sqrt{3}$ 중 가장 큰 수를 M, 가장 작은 수를 m이라 할 때, $\dfrac{M}{m}$의 값은?

① $2^{\frac{1}{12}}$ ② $3^{\frac{1}{6}}$ ③ $\left(\dfrac{4}{3}\right)^{\frac{1}{3}}$

④ $\left(\dfrac{3}{2}\right)^{\frac{1}{6}}$ ⑤ $\left(\dfrac{3}{2}\right)^{\frac{1}{3}}$

해설

$$\sqrt[3]{3^2\sqrt{2}} = 3^{\frac{2}{3}}2^{\frac{1}{6}} = 3^{\frac{4}{6}}2^{\frac{1}{6}} = (3^4\times 2)^{\frac{1}{6}} = 162^{\frac{1}{6}}$$

$$\sqrt{2}\sqrt[3]{3} = 2^{\frac{1}{2}}3^{\frac{1}{3}} = (2^3)^{\frac{1}{6}}(3^2)^{\frac{1}{6}} = 72^{\frac{1}{6}}$$

$$\sqrt[3]{2}\sqrt{3} = 2^{\frac{1}{3}}3^{\frac{1}{2}} = (2^2)^{\frac{1}{6}}(3^3)^{\frac{1}{6}} = 108^{\frac{1}{6}}$$

$$\therefore \frac{M}{m} = \left(\frac{3^4\times 2}{2^3\times 3^2}\right)^{\frac{1}{6}} = \left(\frac{3^2}{2^2}\right)^{\frac{1}{6}} = \left(\frac{3}{2}\right)^{\frac{1}{3}}$$

5. $a=\sqrt{2},\ b=\sqrt[3]{3}$일 때, $\sqrt[6]{6}$을 a, b로 나타낸 것은?

① $a^{\frac{1}{3}}b^{\frac{1}{2}}$ ② $a^{\frac{1}{2}}b^{\frac{1}{3}}$ ③ $a^{\frac{1}{2}}b^{\frac{1}{6}}$ ④ $a^{\frac{1}{6}}b^{\frac{1}{3}}$ ⑤ $a^{\frac{1}{6}}b^{\frac{1}{2}}$

해설

$a=\sqrt{2}=2^{\frac{1}{2}},\ b=\sqrt[3]{3}=3^{\frac{1}{3}}$이므로

$\sqrt[6]{6}=6^{\frac{1}{6}}=2^{\frac{1}{6}}\cdot 3^{\frac{1}{6}}=(2^{\frac{1}{2}})^{\frac{1}{3}}\cdot(3^{\frac{1}{3}})^{\frac{1}{2}}=a^{\frac{1}{3}}b^{\frac{1}{2}}$

6. $a^{\frac{1}{2}}+a^{-\frac{1}{2}}=\frac{5}{2}$ 일 때, $a-\frac{1}{a}$ 의 값은?(단, $a>1$)

① $\frac{15}{4}$ ② 5 ③ $\frac{15}{2}$ ④ 15 ⑤ 1

해설

곱셈 공식의 변형 $(x-y)^2=(x+y)^2-4xy$에 의하여

$$\left(a^{\frac{1}{2}}-a^{-\frac{1}{2}}\right)^2=\left(a^{\frac{1}{2}}+a^{-\frac{1}{2}}\right)^2-4=\left(\frac{5}{2}\right)^2-4=\frac{25}{4}-4=\frac{9}{4}$$

$$\therefore\ a^{\frac{1}{2}}-a^{-\frac{1}{2}}=\frac{3}{2}(\because a>1)$$

$$\therefore a-\frac{1}{a}=\left(a^{\frac{1}{2}}+a^{-\frac{1}{2}}\right)\left(a^{\frac{1}{2}}-a^{-\frac{1}{2}}\right)=\frac{5}{2}\cdot\frac{3}{2}=\frac{15}{4}$$

7. $\left(\dfrac{2}{\sqrt[3]{9}+\sqrt[3]{3}+1}+\dfrac{4}{\sqrt[3]{9}-\sqrt[3]{3}+1}\right)^3$ 을 계산하면?

① 12　② 15　③ 18　④ 21　⑤ 24

해설

$(\sqrt[3]{3}-1)(\sqrt[3]{9}+\sqrt[3]{3}+1)=(\sqrt[3]{3})^3-1=2$ 이므로

$$\frac{2}{\sqrt[3]{9}+\sqrt[3]{3}+1}=\sqrt[3]{3}-1$$

$(\sqrt[3]{3}+1)(\sqrt[3]{9}-\sqrt[3]{3}+1)=(\sqrt[3]{3})^3+1=4$ 이므로

$$\frac{4}{\sqrt[3]{9}-\sqrt[3]{3}+1}=\sqrt[3]{3}+1$$

$$\therefore\ \left(\frac{2}{\sqrt[3]{9}+\sqrt[3]{3}+1}+\frac{4}{\sqrt[3]{9}-\sqrt[3]{3}+1}\right)^3$$

$$=(\sqrt[3]{3}-1+\sqrt[3]{3}+1)^3=(2\cdot\sqrt[3]{3})^3=24$$

8. $x - y = 2, 2^x + 2^{-y} = 5$ 일 때, $8^x + 8^{-y}$ 의 값은?

① 61 ② 62 ③ 63 ④ 64 ⑤ 65

해설

$$\begin{aligned}(\text{주어진식}) &= 2^{3x} + 2^{-3y} \\ &= (2^x + 2^{-y})^3 - 3 \cdot 2^x 2^{-y}(2^x + 2^{-y}) \\ &= 5^3 - 3 \cdot 4 \cdot 5 = 65\end{aligned}$$

9. $x>0$이고 $x^2+x^{-2}=7$일 때, $(x^{\frac{1}{2}}+x^{-\frac{1}{2}})(x+x^{-1})$의 값은?

① $\sqrt{7}$ ② $2\sqrt{5}$ ③ $3\sqrt{5}$ ④ $3\sqrt{7}$ ⑤ $7\sqrt{3}$

해설

곱셈 공식을 써서 식을 변형한다.

$x^2+x^{-2}=7$

$(x+x^{-1})^2=x^2+x^{-2}+2$에서

$(x+x^{-1})^2=7+2=9$

$x+x^{-1}>0$이므로 $x+x^{-1}=3$

$(x^{\frac{1}{2}}+x^{-\frac{1}{2}})^2=x+x^{-1}+2$에서

$(x^{\frac{1}{2}}+x^{-\frac{1}{2}})^2=3+2=5$

$x^{\frac{1}{2}}+x^{-\frac{1}{2}}>0$이므로 $x^{\frac{1}{2}}+x^{-\frac{1}{2}}=\sqrt{5}$

$\therefore (x^{\frac{1}{2}}+x^{-\frac{1}{2}})(x+x^{-1})=3\sqrt{5}$

10. $p\times 3^x=1,\ q\times 3^y=1$ 일 때, 다음 중 $\left(\frac{1}{9}\right)^{2x+y}$ 을 $p,\ q$ 로 바르게 나타낸 것은?

① $2pq$ ② $8pq$ ③ p^2q ④ p^4q^2 ⑤ $\frac{q}{p^2}$

해설

$3^x>0,\ 3^y>0$ 이므로 $p>0,\ q>0$ 이다.

$3^x=\frac{1}{p},\ 3^y=\frac{1}{q}$

$\therefore\ \left(\frac{1}{9}\right)^{2x+y}=(3^{-2})^{2x+y}=3^{-4x-2y}$

$=(3^x)^{-4}(3^y)^{-2}=\left(\frac{1}{p}\right)^{-4}\left(\frac{1}{q}\right)^{-2}=p^4q^2$

11. $36^a = 8,\ 6^b = 4$ 일 때, $2^{\frac{1}{2a-b}}$ 의 값은?

① 4 ② 6 ③ 8 ④ 10 ⑤ 12

해설

$6^{2a} \div 6^b = 2,\ 6^{2a-b} = 2$

$2^{\frac{1}{2a-b}} = (6^{2a-b})^{\frac{1}{2a-b}} = 6$

12. $a = \dfrac{\log_3(\log_5 7)}{2\log_3 2}$ 일 때, 4^a 의 값은?

① $\log_5 7$ ② $\log_3 5$ ③ $3^{\log_5 2}$ ④ $3^{\log_5 5}$ ⑤ $3^{\log_5 7}$

해설

$$a = \frac{\log_3(\log_5 7)}{2\log_3 2}$$

$$= \frac{\log_3(\log_5 7)}{\log_3 2^2}$$

$$= \frac{\log_3(\log_5 7)}{\log_3 4} = \log_4(\log_5 7)$$

$$\therefore 4^a = \log_5 7$$

13. $\log_3 2 + \log_3\left(1+\frac{1}{2}\right) + \log_3\left(1+\frac{1}{3}\right) + \cdots + \log_3\left(1+\frac{1}{80}\right)$ 의 값은?

① 1 ② 2 ③ 3 ④ 4 ⑤ 5

해설

$$\log_3 2 + \log_3\left(1+\frac{1}{2}\right) + \log_3\left(1+\frac{1}{3}\right) + \cdots + \log_3\left(1+\frac{1}{80}\right)$$

$$= \log_3 2 + \log_3 \frac{3}{2} + \log_3 \frac{4}{3} + \cdots + \log_3 \frac{81}{80}$$

$$= \log_3\left(2 \cdot \frac{3}{2} \cdot \frac{4}{3} \cdot \cdots \cdot \frac{81}{80}\right)$$

$$= \log_3 81 = \log_3 3^4$$

$$= 4\log_3 3$$

$$= 4$$

14. $\log_2 x + \log_2 y = \dfrac{3}{2}$ 을 만족하는 두 양수 x, y 에 대하여, $x + 2y$ 의 최솟값을 m 이라 하고 그때의 x, y 의 값을 각각 a, b 라 하자. 이때, $\dfrac{am}{b}$ 의 값은?

① $2^{\frac{5}{4}}$ ② $2^{\frac{3}{2}}$ ③ $2^{\frac{9}{4}}$ ④ $2^{\frac{5}{2}}$ ⑤ $2^{\frac{13}{4}}$

해설

$\log_2 x + \log_x y = \log_2 xy = \dfrac{3}{2} \quad \therefore xy = 2^{\frac{3}{2}}$

산술평균과 기하평균의 관계에 의하여

$x + 2y \geq 2\sqrt{2xy} = 2\sqrt{2 \cdot 2^{\frac{3}{2}}} = 2\sqrt{2^{\frac{5}{2}}} = 2 \cdot 2^{\frac{5}{4}} = 2^{\frac{9}{4}}$

따라서 $x + 2y$ 의 최솟값은 $2^{\frac{9}{4}}$ 이다.

(단, 등호는 $x = 2^{\frac{5}{4}}, y = 2^{\frac{1}{4}}$ 일 때 성립한다.)

$a = 2^{\frac{5}{4}}, b = 2^{\frac{1}{4}}, m = 2^{\frac{9}{4}}$

$\dfrac{am}{b} = 2^{\left(\frac{5}{4} + \frac{9}{4}\right) - \frac{1}{4}} = 2^{\frac{13}{4}}$

15. $\log_2 \sqrt{7+\sqrt{24}}$의 소수부분을 x라 할 때, 2^{x+1}의 값을 구하면?

① $\sqrt{3}+1$ ② $\sqrt{5}+1$ ③ $\sqrt{6}+1$

④ $\sqrt{7}+1$ ⑤ $2\sqrt{2}+1$

해설

$\log_2 \sqrt{7+\sqrt{24}}$

$= \log_2 \sqrt{7+2\sqrt{6}}$

$= \log_2(\sqrt{6}+1)$

$= \log_2(3.\times\times\times)$

$= 1.\times\times\times$

따라서, $x = \log_2(\sqrt{6}+1) - 1$

$2^{x+1} = 2^{\log_2(\sqrt{6}+1)} = \sqrt{6}+1$

16. $\log_2 14$ 의 소수부분을 $a(0 \le a < 1)$ 이라 할 때, 2^{a+2} 의 값을 구하여라.

▶ 답 :

▷ 정답 : 7

해설

$\log_2 14 = 1 + \log_2 7$

$\log_2 4 < \log_2 7 < \log_2 8$

$2 < \log_2 n < 3$

정수 부분 : $1 + 2 = 3$

소수 부분 : $\log_2 14 - 3 = \log_2 \dfrac{14}{8} = a$

$a + 2 = a + \log_2 4$

$= \log_2 \dfrac{14}{8} \cdot 4 = \log_2 \frac{14}{2} = \log_2 7$

$2^{a+2} = 2^{\log_2 7} = 7$

17. $\log_2 3 = a$, $\log_3 7 = b$일 때, $\log_{36} 42$를 a, b로 나타내면?

① $\dfrac{1+a+ab}{1+a}$　② $\dfrac{1+a+2ab}{1+a}$　③ $\dfrac{1+2a+ab}{2+a}$

④ $\dfrac{1+a+ab}{2(1+a)}$　⑤ $\dfrac{2+a+2ab}{2(1+a)}$

해설

로그의 밑을 3으로 통일시키면

$$\log_3 2 = \frac{1}{\log_2 3} = \frac{1}{a},\quad \log_3 7 = b$$

$$\log_{36} 42 = \frac{\log_3 42}{\log_3 36} = \frac{\log_3(2\times 3\times 7)}{\log_3(2^2\times 3^2)}$$

$$= \frac{\log_3 2 + 1 + \log_3 7}{2\log_3 2 + 2}$$

$$\frac{\frac{1}{a}+1+b}{2\cdot\frac{1}{a}+2} = \frac{1+a+ab}{2(1+a)}$$

18. $2^a = 20^b = 10^{10}$일 때, $\dfrac{1}{a} - \dfrac{1}{b}$의 값은?

① $-\dfrac{1}{2}$ ② $-\dfrac{1}{4}$ ③ $-\dfrac{1}{6}$ ④ $-\dfrac{1}{8}$ ⑤ $-\dfrac{1}{10}$

해설

$$a = \frac{10}{\log 2},\ b = \frac{10}{1+\log_2}$$

$$\therefore\ \frac{1}{a} - \frac{1}{b} = \frac{\log 2}{10} - \frac{1+\log 2}{10} = -\frac{1}{10}$$

19. a, x, y가 양의 실수이고 $A = \log_a x^2 - \log_a y^3$, $B = \log_a y^2 - \log_a x^3$ 일 때, 다음 중 $2A + 3B$와 같은 것은?(단, $a \neq 1$)

① $\log_a \frac{1}{x^5}$ ② $\log_a \frac{1}{y^5}$ ③ $\log_a \frac{1}{xy}$

④ $\log_a \frac{x^5}{y^5}$ ⑤ $\log_a \frac{x^5}{y^7}$

해설

$A = \log_a x^2 - \log_a y^3 = 2\log_a x - 3\log_a y$

$B = \log_a y^2 - \log_a x^3 = 2\log_a y - 3\log_a x$

$$\begin{aligned} \therefore 2A + 3B &= 2(2\log_a x - 3\log_a y) + 3(2\log_a x - 3\log_a x) \\ &= -5\log_a x = \log_a x^{-5} = \log_a \frac{1}{x^5} \end{aligned}$$

20. $2\log(a-2b)=\log 2b+\log(62b-a)$ 일 때, $\frac{a}{b}$ 의 값을 구하여라.

▶ 답 :

▷ 정답 : 12

해설

로그의 성질을 이용하여 주어진 식 $2\log(a-2b)=\log 2b+\log(62b-a)$ 을 간단히 정리하면

$\log(a-2b)^2=\log 2b(62b-a)$

$(a-2b)^2=2b(62b-a)$

$a^2-4ab+4b^2=124b^2-2ab$

$a^2-2ab-120b^2=0$

$(a+10b)(a-12b)=0$

$\therefore\ a=-10b$ 또는 $a=12b$

이때 진수 조건에 의하여 $a-2b>0,\ 2b>0,\ 62b-a>0$ 이므로

$a>0,\ b>0$

따라서 $a=12b$ 이고 $\frac{a}{b}=12$ 이다.

21. 이차방정식 $2x^2 - 8x + 1 = 0$의 두 근이 $\log_2 \alpha, \log_2 \beta$일 때, $\log_\alpha 2 + \log_\beta 2 + \log_{\alpha\beta} 2$의 값은?

① $\frac{19}{4}$ ② $\frac{23}{4}$ ③ $\frac{27}{4}$ ④ $\frac{33}{4}$ ⑤ $\frac{35}{4}$

해설

이차방정식의 근과 계수의 관계에 의하여

$\log_2 \alpha + \log_2 \beta = 4,\ \ \log_2 \alpha \cdot \log_2 \beta = \frac{1}{2}$ 이므로

$$\begin{aligned}\log_\alpha 2 + \log_\beta 2 &= \frac{1}{\log_2 \alpha} + \frac{1}{\log_2 \beta} \\ &= \frac{\log_2 \alpha + \log_2 \beta}{\log_2 \alpha \cdot \log_2 \beta} \\ &= \frac{4}{\frac{1}{2}} = 8\end{aligned}$$

$\log_2 \alpha\beta = 4$ 이므로 $\alpha\beta = 2^4$

$\therefore \log_{\alpha\beta} 2 = \log_{2^4} 2 = \frac{1}{4}$

$\therefore \log_\alpha 2 + \log_\beta 2 + \log_{\alpha\beta} 2 = 8 + \frac{1}{4} = \frac{33}{4}$

22. $\log_{10} 2 = 0.3010$, $\log_{10} 3 = 0.4771$ 을 이용하여 $\log_{10} 1.5$ 의 값을 계산하면?

① 0.0880 ② 0.0885 ③ 0.1660

④ 0.1761 ⑤ 0.1777

해설

$$\log_{10} 1.5 = \log_{10}(3 \times 5 \div 10)$$
$$= \log 3 + (1 - \log 2) - 1$$
$$= 0.1761$$

23. 다음 상용로그표를 이용하여 $\log \sqrt[3]{0.138}$의 소수 부분을 구하여라.

수	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9
1.0	.0000	.0043	.0086	.0128	.0170	.0212	.0253	.0294	.0334	.0374
1.1	.0414	.0453	.0492	.0531	.0569	.0607	.0645	.0682	.0719	.0755
1.2	.0792	.0828	.0864	.0899	.0934	.0969	.1004	.1038	.1072	.1106
1.3	.1139	.1173	.1206	.1239	.1271	.1303	.1335	.1367	.1399	.1430
1.4	.1461	.1492	.1523	.1553	.1584	.1614	.1644	.1673	.1703	.1732

▶ 답 :

▷ 정답 : 0.7133

해설

상용로그표에서 $\log 1.38 = 0.1399$이므로

$$\log \sqrt[3]{0.138} = \frac{1}{3}\log 0.138 = \frac{1}{3}\log(1.38 \times 10^{-1})$$ 따라서

$$= \frac{1}{3}(\log 1.38 - 1) = \frac{1}{3}(0.1399 - 1)$$

$$= -0.2867 = -1 + 0.7133$$

$\log \sqrt[3]{0.138}$의 소수 부분은 0.7133이다.

24. $\log x$의 정수 부분이 4이고, $\log y$의 정수 부분이 2일 때, $\log \sqrt{xy}$의 정수 부분을 구하여라.

▶ 답 :

▷ 정답 : 3

해설

$\log x = 4 + \alpha \ (0 \le \alpha < 1)$
$\log y = 2 + \beta \ (0 \le \beta < 1)$
$\log \sqrt{xy} = \frac{1}{2}(\log^x + \log^y)$
$= \frac{1}{2}(4 + \alpha + 2 + \beta)$
$= 3 + \frac{1}{2}(\alpha + \beta)$
$0 \le \alpha < 1,\ 0 \le \beta < 1$이므로
$0 \le \frac{1}{2}(\alpha + \beta) < 1$
$\therefore \log^{\sqrt{xy}}$의 정수 부분은 3

25. 양수 A의 상용로그의 정수 부분이 2일 때, 등식 $\log\frac{A}{2} = 2\log 2\sqrt{2} + \log n$을 만족하는 자연수 n의 개수는?

① 56 ② 57 ③ 58 ④ 59 ⑤ 60

해설

$\log\frac{A}{2} = 2\log 2\sqrt{2} + \log n$에서

$\log A - \log 2 = 2\log 2\sqrt{2} + \log n$

$\log A = \log 2 + 2\log 2\sqrt{2} + \log n = \log 2 + \log 8 + \log n = \log 16n$

$A = 16n$

그런데, 양수 A의 상용로그의 정수 부분이 2이므로

$2 \le \log A < 3, 10^2 \le A < 10^3$

$\therefore 100 \le 16n < 1000$

$6.25 \le n < 62.5$

따라서 자연수 n의 개수는 $62 - 6 = 56$이다.

26. $\log 2 = 0.3010$, $\log 3 = 0.4771$ 일 때, 3^4 는 몇 자리 정수인가?

① 2 ② 3 ③ 4 ④ 8 ⑤ 9

해설

$\log 3^4 = 4\log 3$

$= 4 \times 0.4771 = 1.9084$

따라서 $\log 3^4$ 의 지표는 1 이므로 3^4 은 2자리 정수이다.

27. $\log x$의 정수 부분은 3이고, $\log x$, $\log\sqrt[3]{x}$의 소수 부분의 합은 1이라고 한다. $\log\sqrt{x}$의 정수 부분을 n, 소수 부분을 α라 할 때 $n+8\alpha$의 값을 구하여라.

▶ 답 :

▷ 정답 : 4

해설

$\log x = 3 + \beta \ (0 \le \beta < 1)$

$\log\sqrt[3]{x} = \dfrac{1}{3}\log x = 1 + \dfrac{\beta}{3}$

$\therefore\ \beta + \dfrac{\beta}{3} = 1$

$\therefore\ \beta = \dfrac{3}{4}$

$\log\sqrt{x} = \dfrac{1}{2}(3+\alpha) = \dfrac{3}{2} + \dfrac{3}{4} = \dfrac{9}{4}$

$n = 2,\ \alpha = \dfrac{1}{4}$

$n + 8\alpha = 2 + 2 = 4$

28. 각 항이 모두 양수로 이루어진 등비수열 $\{a_n\}$에 대하여 수열 $\{\log a_n\}$은 어떤 수열인가?

① 공차가 a인 등차수열

② 공차가 $\log r$인 등차수열

③ 공차가 $\log a$인 등차수열

④ 공차가 r인 등비수열

⑤ 공차가 $\log r$인 등비수열

해설

$\{a_n\}$은 등비수열이고 $a_n > 0$이므로 공비를 r이라고 하면

$$\frac{a_{n+1}}{a_n} = r > 0$$

이때 양변에 상용로그를 취하면 $\log \dfrac{a_n + 1}{a_n} = \log r$

$\therefore \log a_{n+1} - \log a_n = \log r$

따라서 수열 $\{\log a_n\}$은 공차가 $\log r$인 등차수열이다.

29. n이 정수일 때, $\left(\frac{1}{64}\right)^{\frac{1}{n}}$ 이 나타낼 수 있는 모든 자연수의 합을 구하여라.

▶ 답 :

▷ 정답 : 78

해설

$$\left(\frac{1}{64}\right)^{\frac{1}{n}} = (64^{-1})^{\frac{1}{n}} = 64^{-\frac{1}{n}} = 2^{-\frac{6}{n}}$$

$2^{-\frac{6}{n}}$ 이 자연수가 되는 정수 n

$n = -1$ 일 때, 2^6

$n = -2$ 일 때, 2^3

$n = -3$ 일 때, 2^2

$n = -6$ 일 때, 2

$\therefore\ 2 + 2^2 + 2^3 + 2^6 = 2 + 4 + 8 + 64 = 78$

30. $p=\left(1+\frac{1}{2}\right)\left(1+\frac{1}{2^2}\right)\left(1+\frac{1}{2^4}\right)\left(1+\frac{1}{2^8}\right)$
$\left(1+\frac{1}{2^{16}}\right)$에 대하여 $2-p=2^k$일 때, 실수 k의 값은?

① -5 ② -16 ③ -30 ④ -31 ⑤ -32

해설

$p=\left(1+\frac{1}{2}\right)\left(1+\frac{1}{2^2}\right)\left(1+\frac{1}{2^4}\right)\left(1+\frac{1}{2^8}\right)$
$\left(1+\frac{1}{2^{16}}\right)$의 양변에 $\left(1-\frac{1}{2}\right)$을 곱하면

$$\left(1-\frac{1}{2}\right)p$$
$$=\left(1-\frac{1}{2}\right)\left(1+\frac{1}{2}\right)\left(1+\frac{1}{2^2}\right)\left(1+\frac{1}{2^4}\right)\left(1+\frac{1}{2^8}\right)\left(1+\frac{1}{2^{16}}\right)$$
$$=\left(1-\frac{1}{2^2}\right)\left(1+\frac{1}{2^2}\right)\left(1+\frac{1}{2^4}\right)\left(1+\frac{1}{2^8}\right)\left(1+\frac{1}{2^{16}}\right)$$
$$=\left(1-\frac{1}{2^4}\right)\left(1+\frac{1}{2^4}\right)\left(1+\frac{1}{2^8}\right)\left(1+\frac{1}{2^{16}}\right)$$
$$=\left(1-\frac{1}{2^8}\right)\left(1+\frac{1}{2^8}\right)\left(1+\frac{1}{2^{16}}\right)$$
$$=\left(1-\frac{1}{2^{16}}\right)\left(1+\frac{1}{2^{16}}\right)=1-\frac{1}{2^{32}}$$
$$\frac{1}{2}p=1-\frac{1}{2^{32}},\ p=2-\frac{1}{2^{31}}$$
$$2-p=\frac{1}{2^{31}}=2^{-31}$$
$$\therefore\ k=-31$$

31. $f(x) = 2^x$ 일 때, 다음 중 16^{16}과 같은 것은?

① $f(f(1))$ ② $f(f(2))$ ③ $f(f(6))$

④ $f(f(10))$ ⑤ $f(f(16))$

해설

$f(x) = 2^x$ 에서 $f(6) = 2^6 = 64 \cdots$ ㉠

$16^{16} = (2^4)^{16} = 2^{64} = f(64) \cdots$ ㉡

㉡에 ㉠을 대입하면

$\therefore\ 16^{16} = f(64) = f(f(6))$

32. 모든 실수 x에 대하여 $\log_{(k-2)^2}(kx^2+kx+x)$의 값의 존재하기 위한 정수 k의 개수는?

① 0 ② 1 ③ 2 ④ 3 ⑤ 4

해설

밑의 조건에서 $(k-2)^2>0, (k-2)^2\neq 1$
$(k-2)^2>0$에서 $k-2\neq 0 \therefore k\neq 2 \cdots$ ㉠
$(k-2)^2\neq 1$에서 $k-2\neq 1, k-2\neq -1 \cdots$ ㉡
㉠, ㉡에 의하여
$k\neq 1, k\neq 2, k\neq 3 \cdots$ ㉢
진수의 조건에서 $kx2+kx+1>0$
(i)$k=0$일 때, $1>0$이므로 부등식은 항상 성립한다.
(ii)$k=0$일 때, 방정식 $kx^2+kx+1=0$의 판별식을 D라 하면
$D=k^2-4k<0, k(k-4)<0$
$\therefore 0<k<4$
(i), (ii)에 의하여 $0\leq k<4 \cdots$ ㉣
따라서 ㉢, ㉣을 모두 만족시키는 정수는 0으로 1개이다.

33. $\log x$의 정수 부분이 1이고 $\log x$의 소수 부분과 $\log x^3$의 소수 부분이 같을 때, 모든 x의 값들의 곱은 10^k이다. 이때, 상수 k의 값을 구하여라.

▶ 답 :

▷ 정답 : $\frac{5}{2}$

해설

$\log x$의 소수 부분을 α라 하면
$\log x = 1 + \alpha$ (단, $0 \le \alpha < 1$)
$\therefore x^3 = 3\log x = 3(1+\alpha) = 3 + 3\alpha$
(i)$0 \le \alpha < \frac{1}{3}$ 일 때,
$\log x^3$의 소수 부분은 3α이므로 $\alpha = 3\alpha \ \therefore \alpha = 0$
$\therefore \log x = 1,\ x = 10$
(ii) $\frac{1}{3} \le \alpha < \frac{2}{3}$ 일 때,
$\log x^3 = 3 + 3\alpha = 4 + (3\alpha - 1)$
이 때, $\log x^3$의 소수 부분은 $3\alpha - 1$이므로 $\alpha = 3\alpha - 1 \ \therefore \frac{1}{2}$
$\therefore \log x = \frac{3}{2},\ x = 10^{\frac{3}{2}}$
iii) $\frac{2}{3} \le \alpha < 1$ 일 때,
$\log x^3 = 3 + 3\alpha = 5 + (3\alpha - 2)$
이때, $\log x^3$의 소수 부분은 $3\alpha - 2$이므로 $\alpha = 3\alpha - 2 \ \therefore \alpha = 1$(모순)
따라서 (i),(ii), (iii)에서 $10^1 \times 10^{\frac{3}{2}} = 10^{1+\frac{3}{2}} = 10^{\frac{5}{2}}$
$\therefore k = \frac{5}{2}$

해설

$\log x$의 정수 부분이 1이므로
$1 \le \log x < 2 \cdots\cdots$ ㉠
$\log x$의 소수 부분과 $\log x^3$의 소수 부분이 같으므로
$\log x^3 - \log x = 2\log x =$ (정수)
㉠에서 $2 \le 2\log x < 4$이므로
$2\log x = 2$ 또는 $2\log x = 3$,
$x = 10$ 또는 $\log x = \frac{3}{2}$,
$10 \cdot 10^{\frac{3}{2}} = 10^{\frac{5}{2}} = 10^k$
$\therefore k = \frac{5}{2}$