

1. 다음 이차함수 중 최댓값이 3 인 것은?

① $y = 2(x - 1)^2 + 3$

② $y = -x^2 + x + 3$

③ $y = -(x - 3)^2 + 1$

④ $y = -3(x + 2)^2 + 3$

⑤ $y = -\frac{1}{2}(x + 3)^2 - 3$

해설

이차항의 계수가 음수이면서 꼭짓점의 y 좌표가 3 인 것을 찾는다.

2. x 가 정수일 때, $y = 2x^2 - 3x + 6$ 의 최솟값을 구하여라.

▶ 답 :

▷ 정답 : 5

해설

$$y = 2x^2 - 3x + 6 = 2\left(x - \frac{3}{4}\right)^2 + \frac{39}{8}$$

x 가 정수이므로 $x = 1$ 일 때, 최솟값 5 를 갖는다.

3. 그래프의 모양이 $y = -2x^2$ 과 같고 $x = 1$ 일 때 최댓값 5 를 갖는다.
이때, 이 함수의 식은?

① $y = -2x^2 - 4x + 4$

② $y = -2x^2 - 4x + 5$

③ $y = -2x^2 + 4x - 3$

④ $y = -2x^2 + 4x + 3$

⑤ $y = -2x^2 - x + 5$

해설

꼭짓점의 좌표가 $(1, 5)$, x^2 의 계수가 -2 이므로

$$y = -2(x - 1)^2 + 5$$

$$= -2(x^2 - 2x + 1) + 5$$

$$= -2x^2 + 4x + 3$$

$$\therefore y = -2x^2 + 4x + 3$$

4. 합이 18 인 두 수가 있다. 한 수를 x , 두 수의 곱을 y 라 할 때, 두 수의 곱의 최댓값을 구하면?

① 11 ② 21 ③ 25 ④ 81 ⑤ 100

해설

합이 18 인 두 수가 있다. 한 수를 x 로 두면 나머지 한 수는 $(18 - x)$ 이다.

$$y = x(18 - x) = -x^2 + 18x = -(x^2 - 18x + 81) + 81$$

$$y = -(x - 9)^2 + 81$$

따라서 두 수의 곱의 최댓값은 81 이다.

5. 이차함수 $y = x^2 + 2ax + b$ 가 두 점 $(1, 8)$, $(-1, 4)$ 를 지날 때, 이 이차함수의 최댓값 또는 최솟값은?

① 최댓값: 4

② 최솟값: 4

③ 최댓값: 1, 최솟값: 3

④ 최댓값: 6

⑤ 최솟값: 1

해설

$y = x^2 + 2ax + b$ 가 두 점 $(1, 8)$, $(-1, 4)$ 를 지나므로

$$8 = 1 + 2a + b, 4 = 1 - 2a + b$$

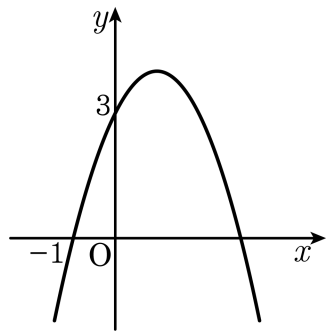
두 식을 연립하여 풀면

$$a = 1, b = 5$$

$$\therefore y = x^2 + 2x + 5 = (x + 1)^2 + 4$$

따라서 $x = -1$ 일 때, 최솟값은 4

6. 다음 그림은 이차함수 $y = ax^2 + 2x + c$ 의 그래프이다. 이차함수의 최댓값은?



- ① $\frac{7}{2}$ ② 4 ③ $\frac{9}{2}$ ④ 5 ⑤ $\frac{11}{2}$

해설

$y = ax^2 + 2x + c$ 에 점 $(-1, 0)$, $(0, 3)$ 을 대입하면

$$0 = a - 2 + c$$

$$3 = c, a = -1$$

$$y = -x^2 + 2x + 3$$

$$\therefore y = -(x-1)^2 + 4$$

따라서 최댓값은 4 이다.

7. 이차함수 $y = x^2 + 4ax + b$ 가 $x = 2$ 에서 최솟값 6 을 가질 때, $a + b$ 의 값은?

① -9

② -6

③ 6

④ 9

⑤ 14

해설

$$y = x^2 + 4ax + b = (x + 2a)^2 - 4a^2 + b$$

$x = 2$ 일 때, 최솟값이 6 이므로

$$y = (x - 2)^2 + 6 \text{ 이다.}$$

$$\text{따라서 } 2a = -2, a = -1$$

$$-4a^2 + b = 6, b = 10$$

$$\therefore a + b = 9$$

8. 이차함수 $y = x^2 + 4x - m$ 의 최솟값이 4 일 때, 상수 m 의 값을 고르면?

① -10 ② -8 ③ -4 ④ 0 ⑤ 2

해설

$$y = (x + 2)^2 - 4 - m \text{ 에서 } -4 - m = 4 \quad \therefore m = -8$$

9. 이차함수 $y = x^2 - 2ax - 2a - 5$ 의 최솟값을 m 이라고 할 때, m 의 최댓값을 구하면?

① -1

② -2

③ -3

④ -4

⑤ -5

해설

$$\begin{aligned} y &= x^2 - 2ax - 2a - 5 \\ &= (x - a)^2 - a^2 - 2a - 5 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} y \text{ 의 최솟값 : } m &= -a^2 - 2a - 5 \\ &= -(a + 1)^2 - 4 \end{aligned}$$

$$m \text{ 의 최댓값 : } -4$$

10. 차가 14 인 두 수의 곱의 최솟값을 구하여라.

▶ 답 :

▷ 정답 : -49

해설

두 수를 x , $x + 14$ 라 하고, 두 수의 곱을 y 라고 하면 $y = x(x + 14) = x^2 + 14x = (x + 7)^2 - 49$
따라서 $x = -7$ 일 때, 최솟값 -49 를 갖는다.

11. 둘레의 길이가 24m 인 직사각형 중 그 넓이가 가장 넓을 때의 넓이를 구하면?

① 30 cm^2

② 32 cm^2

③ 34 cm^2

④ 36 cm^2

⑤ 38 cm^2

해설

가로의 길이를 $x\text{ m}$, 세로의 길이를 $(24 - x)\text{ m}$, 넓이를 $y\text{ m}^2$ 라 하면

$$\begin{aligned}y &= x(24 - x) \\&= -x^2 + 24x \\&= -(x^2 - 24x + 144 - 144) \\&= -(x - 12)^2 + 144\end{aligned}$$

따라서 $x = 12$ 일 때 넓이의 최댓값은 144 m^2 이다.

12. 가로 길이가 6cm , 세로 길이가 10cm 인 직사각형에서 가로 길이를 x cm 길게 하고 세로 길이를 x cm 짧게 한 직사각형의 넓이가 최대일 때, x 값은?

① 2 ② 4 ③ 8 ④ 14 ⑤ 15

해설

넓이를 y 라 하면
 $y = (6 + x)(10 - x)$
 $= -x^2 + 4x + 60$
 $= -(x^2 - 4x + 4 - 4) + 60$
 $= -(x - 2)^2 + 64$
따라서 $x = 2$ 일 때 최댓값 64 를 가진다.

13. 둘레의 길이가 20 cm 인 철사를 구부려서 부채꼴 모양을 만들려고 한다. 부채꼴의 넓이가 최대가 되도록 하는 부채꼴의 반지름을 a , 이때 부채꼴의 넓이를 b 라 할 때, $a + b$ 의 값을 구하여라.

▶ 답 :

▷ 정답 : 30

해설

부채꼴의 넓이를 S 라 하면

$$\begin{aligned} S &= \frac{1}{2}a(20 - 2a) = a(10 - a) = -a^2 + 10a \\ &= -(a^2 - 10a + 25) + 25 \\ &= -(a - 5)^2 + 25 \end{aligned}$$

$$a = 5, b = 25$$

따라서 $a + b = 30$ 이다.

14. 과학 탐구 반 학생들이 물 로켓을 발사하는데 위로 똑바로 쏘아 올린 물 로켓의 t 초 후의 높이가 $(40t - 8t^2)$ m 이다. 이 때 물 로켓이 올라갈 수 있는 최대 높이는?

① 30m ② 35m ③ 40m ④ 45m ⑤ 50m

해설

높이를 h 라 하면

$$h = -8t^2 + 40t = -8\left(t - \frac{5}{2}\right)^2 + 50$$

$\therefore 50\text{m}$

15. 지면으로부터 60m 되는 높이에서 초속 60m 로 곧바로 위로 쏘아 올린 물체의 x 초 후의 높이를 y m 라고 하면 대략 $y = -5x^2 + 60x + 60$ 인 관계가 성립한다. 그 물체의 높이가 최대가 되는 것은 쏘아 올린 지 몇 초 후인가? 또한, 그 때의 높이를 구하여라.
- ▶ 답 : 초
- ▶ 답 : m
- ▷ 정답 : 6초
- ▷ 정답 : 240 m

해설

$y = -5x^2 + 60x + 60 = -5(x - 6)^2 + 240$
따라서 $x = 6$ 일 때, 최댓값 240을 갖는다.

16. 이차함수 $y = -3x^2 + 6x + 4a$ 의 최댓값은 음수이고, 그 그래프가 점 $(-a, 2a - 7)$ 을 지날 때, 상수 a 의 값을 구하여라.

▶ 답 :

▷ 정답 : $-\frac{7}{3}$

해설

$$\begin{aligned} y &= -3x^2 + 6x + 4a \\ &= -3(x-1)^2 + 3 + 4a \end{aligned}$$

$y = -3(x-1)^2 + 3 + 4a$ 의 그래프가 점 $(-a, 2a-7)$ 을 지나므로
 $2a-7 = -3(-a-1)^2 + 3 + 4a$ 을 정리하면 $3a^2 + 4a - 7 = 0$,
 $(3a+7)(a-1) = 0$

$$\therefore a = -\frac{7}{3} \text{ or } 1$$

그런데 최댓값 $3 + 4a$ 의 값이 음수이므로 $a = -\frac{7}{3}$ 이다.

17. 두 함수 $f(x) = ax + b$, $g(x) = x^2 + cx + d$ 가 두 점 $(1, a + b)$, $(-3, -3a + b)$ 에서 만날 때, 함수 $h(x) = g(x) - f(x)$ 의 최솟값을 구하여라.

▶ 답 :

▷ 정답 : -4

해설

두 함수의 그래프의 교점의 x 좌표가 1 과 -3 이므로 $ax + b = x^2 + cx + d$,

즉, $x^2 + (c - a)x + (d - b) = 0$ 은 두 근이 1, -3 이다.

근과 계수의 관계에 의해

$$a - c = -2, d - b = -3$$

$$\begin{aligned}\therefore h(x) &= g(x) - f(x) \\ &= x^2 + (c - a)x + (d - b) \\ &= x^2 + 2x - 3 \\ &= (x + 1)^2 - 4\end{aligned}$$

따라서 $x = -1$ 일 때, 최솟값 -4 를 갖는다.

18. 이차함수 $y = ax^2 + bx + c$ 는 $x = 2$ 에서 최댓값 3 을 갖고 제2 사분면을 지나지 않는다고 할 때, a 의 값의 범위는?

① $a \geq -\frac{3}{4}$

② $a \leq -\frac{3}{4}$

③ $a \leq \frac{3}{4}$

④ $a \leq 3$

⑤ $a \geq -3$

해설

$$y = a(x - 2)^2 + 3(a < 0)$$

$$y = ax^2 - 4ax + 4a + 3$$

$$(y\text{절편}) \leq 0, 4a + 3 \leq 0$$

$$\therefore a \leq -\frac{3}{4}$$

19. 이차함수 $y = x^2 - 6mx - 9m + 6$ 의 최솟값을 $f(m)$ 이라고 할 때, $f(m)$ 의 최댓값을 구하면?

- ① $\frac{21}{4}$ ② $\frac{13}{2}$ ③ $\frac{33}{4}$ ④ $\frac{31}{2}$ ⑤ 8

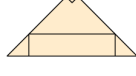
해설

$$\begin{aligned} y &= x^2 - 6mx - 9m + 6 \\ &= (x^2 - 6mx + 9m^2) + (-9m^2 - 9m + 6) \\ &= (x - 3m)^2 + (-9m^2 - 9m + 6) \end{aligned}$$

$$f(m) = -9m^2 - 9m + 6 = -9\left(m + \frac{1}{2}\right)^2 + \frac{33}{4}$$

$\therefore f(m)$ 의 최댓값은 $\frac{33}{4}$ 이다.

20. 빗변의 길이가 40 인 직각이등변삼각형에 다음 그림과 같이 직사각형을 그릴 때, 직사각형의 넓이의 최댓값을 구하여라.

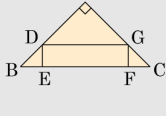


▶ 답 :

▷ 정답 : 200

해설

다음 그림에서 선분 DE 의 길이를 x 라 하면
 $\triangle ABC$ 는 이등변삼각형이고 $\angle B = 45^\circ$ 이므로
 $\overline{BE} = x$ 이다.



마찬가지로 $\overline{FC} = x$

$$\therefore \overline{EF} = 40 - x - x = 40 - 2x$$

직사각형의 넓이를 S 라 하면

$$\begin{aligned} S &= x(40 - 2x) \\ &= -2x^2 + 40x \\ &= -2(x - 10)^2 + 200 \end{aligned}$$

따라서 $x = 10$ 일 때, 직사각형의 넓이의 최댓값은 200 이다.

21. 권당 90000 원인 책을 100 권까지는 정가에 팔고, 101 권부터는 판매량이 1 권씩 증가할 때마다 200 원씩 할인해서 판다고 할 때, 총 판매금액이 최대가 될 때의 권당 판매 가격을 구하여라.

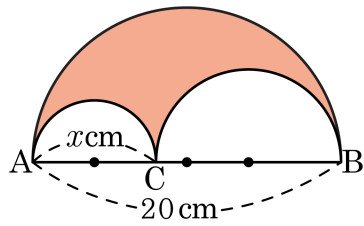
▶ 답 : 원

▷ 정답 : 55000 원

해설

판매량을 x 권이라 하면
(1) $x \leq 100$ 일 때
(총 판매 금액) $= 90000 \times x = 90000x$
따라서 $x = 100$ 일 때, 총 판매금액의 최댓값은 9000000 원이다.
(2) $x > 100$ 일 때
(판매가) $= 90000 - 200(x - 100) = 110000 - 200x$
(총 판매 금액) $= x(110000 - 200x)$
 $= -200x^2 + 110000x$
 $= -200(x - 275)^2 + 15125000$
따라서 판매권수가 $x = 275$ 일 때, 총 판매 금액의 최댓값은 15125000 원이다.
(1), (2)에 의하면 판매량이 275 권일 때, 총 판매금액이 15125000 원이고,
이때의 판매가는 한 권당 55000 원이다.

22. 다음 그림과 같이 세 개의 반원으로 이루어진 도형이 있다. 큰 반원의 지름이 20 cm 이고 색칠한 부분의 넓이가 $y\pi \text{ cm}^2$ 일 때, y 의 최댓값을 구하면?



- ① 10 ② 15 ③ 16 ④ 25 ⑤ 36

해설

$\overline{AC} = x \text{ cm}$ 이므로 $\overline{BC} = (20 - x) \text{ cm}$ 이다.

따라서 색칠한 부분의 넓이 S 는

(전체 반원의 넓이 - 작은 두 원의 넓이의 합)이다.

$$\frac{1}{2} \times 10^2 \pi - \left\{ \frac{1}{2} \pi \left(\frac{x}{2} \right)^2 + \frac{1}{2} \pi \left(\frac{20-x}{2} \right)^2 \right\} = y\pi$$

$$50\pi - \left(\frac{x^2}{8} \pi + \frac{400 - 40x + x^2}{8} \pi \right) = y\pi$$

$$50\pi - \left(\frac{2x^2 - 40x + 400}{8} \right) \pi = y\pi$$

$$-\frac{1}{4}x^2\pi + 5x\pi = y\pi$$

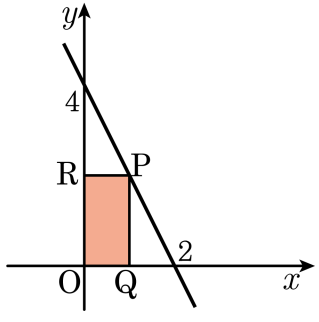
$$y\pi = -\frac{1}{4}\pi(x^2 - 20x)$$

$$= -\frac{1}{4}\pi(x^2 - 20x + 100 - 100)$$

$$= -\frac{1}{4}\pi(x - 10)^2 + 25\pi \text{ 이다.}$$

따라서 두 원의 반지름이 각각 10 cm 일 때, 넓이는 최댓값 $25\pi \text{ cm}^2$ 를 갖는다.

23. 직선 $y = -2x + 4$ 위의 제1 사분면에 있는 한 점 P 에서 x 축, y 축에 수선을 그어 그때의 수선의 발을 각각 Q, R 이라 할 때, 사각형 OQPR 의 넓이의 최댓값은?



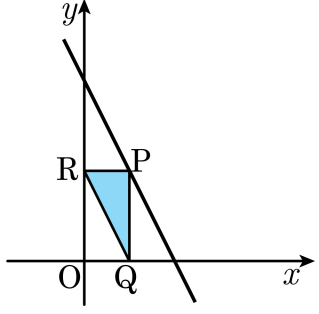
- ① 2 ② 3 ③ 4 ④ 5 ⑤ 7

해설

$$\begin{aligned} y &= x(-2x + 4) \quad (0 < x < 2) \\ &= -2x^2 + 4x \\ &= -2(x^2 - 2x + 1 - 1) \\ &= -2(x - 1)^2 + 2 \end{aligned}$$

$x = 1$ 일 때 최댓값 2

24. 다음 그림과 같이 직선 $y = -2x + 6$ 위의 점 P 에서 x 축, y 축에 내린 수선의 발을 각각 Q, R 이라 할 때, $\triangle PRQ$ 의 넓이의 최댓값을 구하면? (단, 점 P 는 제 1 사분면 위의 점이다.)



- ① $\frac{9}{4}$ ② $\frac{7}{4}$ ③ $\frac{5}{4}$ ④ $\frac{9}{2}$ ⑤ $\frac{7}{2}$

해설

점 P 의 x 좌표를 a 라 하면

$P(a, -2a + 6)$, $Q(a, 0)$, $R(0, -2a + 6)$

$\triangle PRQ$ 의 넓이를 y 라 하면

$$y = \frac{1}{2}a(-2a + 6)$$

$$= -a^2 + 3a$$

$$= -\left(a^2 - 3a + \frac{9}{4} - \frac{9}{4}\right)$$

$$= -\left(a - \frac{3}{2}\right)^2 + \frac{9}{4}$$

$$a = \frac{3}{2} \text{ 일 때 최댓값 } \frac{9}{4}$$

25. 지면으로부터 20 m 높이의 옥상에서 초속 20 m 로 쏘아 올린 물체의 t 초 후의 높이를 h m 라 할 때, 관계식 $h = 20t - t^2 + 20$ 이 성립한다. 높이가 가장 높을 때는 던진 후 몇 초 후인가?

① 2 ② 4 ③ 6 ④ 8 ⑤ 10

해설

$$\begin{aligned} h &= 20t - t^2 + 20 \\ &= -(t^2 - 20t) + 20 \\ &= -(t - 10)^2 + 120 \end{aligned}$$

따라서 $t = 10$ 일 때 최댓값 120 를 가진다.