1. A 의 모임은 24로 나눌 때 나머지가 2인 자연수이고, B 의 모임은 15로 나눌 때 나머지가 2인 자연수일 때, A 와 B 의 공통부분에서 가장 작은 세 자리의 수는?

① 120 ② 121 ③ 122 ④ 123 ⑤ 124

해설

A 와 B 의 공통된 부분에서 가장 작은 수는 24와 15의 최소공배수보다 2가 더 큰 수이다.
따라서 24, 15의 최소공배수는 120이므로 구하는 수는 122이다.

2. 이차방정식 $x^2 + ax - 8 = 0$ 의 한 근이 2일 때, 다른 한 근은?

- ① -5 ② -4 ③ -3 ④ -2 ⑤ -1

해설

$x^2 + ax - 8 = 0$ 에 $x = 2$ 를 대입하면

$$4 + 2a - 8 = 0$$

$$\therefore a = 2$$

$$x^2 + 2x - 8 = 0$$

$$(x + 4)(x - 2) = 0$$

$$\therefore x = 2 \text{ 또는 } x = -4$$

3. 이차방정식 $3x^2 + ax + 12 = 0$ 이 음수의 중근을 가질 때, a 의 값을 구하면?

① -12 ② -9 ③ 4 ④ 9 ⑤ 12

해설

$$\begin{aligned} 3x^2 + ax + 12 &= 0 \\ x^2 + \frac{a}{3}x + 4 &= 0, (x+2)^2 = 0 \\ \frac{a}{3} &= 4 \quad \therefore a = 12 \end{aligned}$$

4. 이차방정식 $(2x-1)^2 = 3$ 의 두 근의 합을 구하면?

- ① -1 ② 0 ③ 1 ④ 2 ⑤ 6

해설

$$(2x-1)^2 = 3$$

$$x = \frac{1 \pm \sqrt{3}}{2}$$

$$\therefore \frac{1 + \sqrt{3}}{2} + \frac{1 - \sqrt{3}}{2} = 1$$

5. 이차방정식 $2x^2 - 12x + 13 = 0$ 을 $(x-A)^2 = B$ 꼴로 나타낼 때, $A+B$ 의 값을 구하면?

- ① $\frac{11}{2}$ ② 5 ③ 6 ④ $\frac{13}{2}$ ⑤ 7

해설

$$2x^2 - 12x + 13 = 0 \rightarrow 2(x^2 - 6x + 9 - 9) + 13 = 0$$

$$\rightarrow 2(x-3)^2 = 5 \text{ 이므로 } \rightarrow (x-3)^2 = \frac{5}{2}$$

$$A = 3, B = \frac{5}{2} \text{ 에서 } A+B = \frac{11}{2} \text{ 이다.}$$

6. 이차방정식 $(x-1)^2 + a - 2 = 0$ 의 근이 존재할 때, 다음 중 a 의 값이 될 수 없는 것은?

① 3 ② 0 ③ -2 ④ -5 ⑤ -7

해설

$(x-1)^2 = -a+2$ 가 해를 가지려면, $-a+2 \geq 0$
 $\therefore a \leq 2$

7. 이차방정식 $x^2 - 2x - 4 = 0$ 의 두 근의 합과 곱이 $3x^2 + ax + b = 0$ 의 두 근일 때, $-\frac{b}{a}$ 의 값은?

- ① 1 ② 2 ③ 3 ④ 4 ⑤ 5

해설

근과 계수와의 관계에 의해 두 근의 합은 2, 두 근의 곱은 -4
따라서 2, -4가 $3x^2 + ax + b = 0$ 의 두 근이다.

$$\text{두 근의 합 } -\frac{a}{3} = 2 + (-4) = -2, a = 6$$

$$\text{두 근의 곱 } \frac{b}{3} = 2 \times (-4) = -8, b = -24$$

$$\therefore -\frac{b}{a} = 4$$

8. 이차방정식 $x^2 - 4x + 2 = 0$ 의 한 근이 a 일 때, $a^2 + \frac{4}{a^2}$ 의 값은?

- ① 12 ② 13 ③ 15 ④ 16 ⑤ 18

해설

$x = a$ 를 주어진 이차방정식에 대입하면 $a^2 - 4a + 2 = 0$

양변을 a 로 나누면 $a - 4 + \frac{2}{a} = 0$ 이므로 $a + \frac{2}{a} = 4$

$$\therefore a^2 + \frac{4}{a^2} = \left(a + \frac{2}{a}\right)^2 - 4 = 4^2 - 4 = 12$$

9. 이차방정식 $x^2 - 8x + 15 = 0$ 의 두 근을 a, b 라고 할 때, 다음 중 $a+2, b+2$ 를 두 근으로 갖는 이차항의 계수가 1인 이차방정식은?

① $x^2 - 2x - 35 = 0$

② $x^2 + 2x - 35 = 0$

③ $x^2 - 12x + 35 = 0$

④ $x^2 + 12x + 35 = 0$

⑤ $x^2 - 4x - 30 = 0$

해설

$$x^2 - 8x + 15 = 0$$

$$(x - 5)(x - 3) = 0$$

$$a = 5, b = 3$$

$$\therefore a + 2 = 7, b + 2 = 5$$

따라서 5, 7을 두 근으로 하는 이차방정식은

$$(x - 7)(x - 5) = 0$$

$$\therefore x^2 - 12x + 35 = 0$$

10. 이차방정식 $(x-1)(x-b) = -1$ 이 0이 아닌 중근 a 를 가진다. 이때, b 의 값은? (단, a, b 는 정수)

① 2 ② 3 ③ 4 ④ 5 ⑤ 6

해설

$(x-1)(x-b) = -1$ 이 중근 a 를 가지므로

x 에 a 를 대입하면

$$(a-1)(a-b) = -1$$

i) $a-1 = -1, a-b = 1$ 인 경우

$$a = 0, b = -1, a \neq 0 \text{이므로 부적합}$$

ii) $a-1 = 1, a-b = -1$ 인 경우

$$a = 2, b = 3$$

$$\therefore b = 3$$

11. 서로 다른 실수 a, b, c 에 대하여 $a + b + c = 0$ 일 때, 이차방정식 $ax^2 + bx + c = 0$ 의 근의 개수를 구하면?

- ① 서로 다른 두 개의 근을 갖는다.
- ② 중근을 갖는다.
- ③ 근이 존재하지 않는다.
- ④ 모든 실수에 대해서 만족한다.
- ⑤ 알 수 없다.

해설

방정식 $ax^2 + bx + c = 0$ 의 판별식 $D = b^2 - 4ac$ 에 $b = -a - c$ 를 대입하면 $D = (-a - c)^2 - 4ac = a^2 - 2ac + c^2 = (a - c)^2 \geq 0$ $a \neq c, a - c \neq 0$ 이므로 $(a - c)^2 > 0$ 이다. 따라서 이차방정식 $ax^2 + bx + c = 0$ 은 서로 다른 두 개의 실근을 가진다.

12. 이차방정식 $3x^2 - 6x + k + 2 = 0$ 의 근의 개수가 1개일 때, 상수 k 의 값은?

- ① 1 ② 2 ③ 3 ④ 4 ⑤ 5

해설

이차방정식 $3x^2 - 6x + k + 2 = 0$ 은 중근을 갖는다.

$$3x^2 - 6x + k + 2 = 0$$

$$3(x^2 - 2x) = -k - 2$$

$$3(x^2 - 2x + 1) = -k - 2 + 3$$

$$3(x - 1)^2 = -k + 1$$

중근을 가져야 하므로 $-k + 1 = 0$

$$\therefore k = 1$$

13. x 에 관한 이차방정식 $x^2 - 2(k+a)x + (k^2 - k + b) = 0$ 이 k 값에 관계없이 중근을 가질 때, $8ab$ 의 값은?

- ① -2 ② 2 ③ -1 ④ 1 ⑤ 0

해설

$$D/4 = (k+a)^2 - (k^2 - k + b) = 0$$

k 에 대해서 정리하면

$$(2a+1)k + a^2 - b = 0, \text{ 이 식이 } k \text{에 관한 항등식이므로 } 2a+1 = 0, \quad a^2 - b = 0$$

$$\therefore a = -\frac{1}{2}, \quad b = \frac{1}{4}$$

$$\therefore 8ab = 8 \left(-\frac{1}{2}\right) \left(\frac{1}{4}\right) = -1$$

14. x 에 대한 이차방정식 $x^2 + ax + a^2 + a - 1 = 0$ 이 서로 다른 두 근 α, β 를 가질 때, $\alpha + \beta$ 의 범위는 $m < \alpha + \beta < n$ 이다. $m + n$ 의 값은?

- ① 1 ② $\frac{4}{3}$ ③ $\frac{5}{3}$ ④ 2 ⑤ $\frac{7}{3}$

해설

근과 계수의 관계에서
 $\alpha + \beta = -a$, $\alpha\beta = a^2 + a - 1$
서로 다른 두 근을 가지므로
 $a^2 - 4a^2 - 4a + 4 > 0$
 $(3a - 2)(a + 2) < 0$
 $-2 < a < \frac{2}{3}$
그런데 $\alpha + \beta = -a$ 이므로
 $-\frac{2}{3} < \alpha + \beta < 2$
 $\therefore m + n = \frac{4}{3}$

15. 다음 이차방정식이 중근을 가질 때 $k, k+5$ 를 두 근으로 하고 이차항의 계수가 1 인 이차방정식은? (단, $k < 0$)

$$2x^2 + kx + 8 = 0$$

- ① $x^2 - 11x + 24 = 0$ ② $x^2 + 11x + 24 = 0$
③ $x^2 - 11x - 24 = 0$ ④ $x^2 + 11x - 24 = 0$
⑤ $x^2 + 5x - 12 = 0$

해설

$$k^2 - 4 \times 2 \times 8 = 0, k = \pm 8$$

$$k < 0 \text{ 이므로 } k = -8$$

$-8, -3$ 을 두 근으로 하고 이차항의 계수가 1 인 이차방정식은 $x^2 + 11x + 24 = 0$