

1. 거듭제곱에 대한 설명 중 옳은 것은?

① $\sqrt[4]{81} = \pm 3$

② $\sqrt[3]{-64} = -8$

③ 16의 네제곱근은 ± 2 이다.

④ $\sqrt{(-3)^2}$ 의 제곱근은 3이다.

⑤ -1은 -1의 세제곱근 중 하나이다.

해설

① $\sqrt[4]{81} = \sqrt{9} = 3 \quad \therefore$ 거짓

② $\sqrt[3]{-64} = \sqrt[3]{(-4)^3} = -4 \quad \therefore$ 거짓

③ 16의 네제곱근은 $\pm 2, \pm 2i$ 이다. $\therefore$ 거짓

④ $\sqrt{(-3)^2} = \sqrt{9} = 3$ 의 제곱근은 $\pm \sqrt{3}$ 이다. $\therefore$ 거짓

⑤ $(-1)^3 = -1$ 이므로 -1은 -1의 세제곱근 중 하나이다. $\therefore$ 참

2. $\sqrt{4 \sqrt[3]{2 \sqrt[4]{2}}}$ 를 $2^{\frac{q}{p}}$ 로 나타낼 때, $p + q$ 의 값을 구하여라. (단, p, q 는 서로소인 자연수)

▶ 답 :

▷ 정답 : 53

해설

$$\begin{aligned}\sqrt{4 \sqrt[3]{2 \sqrt[4]{2}}} &= \sqrt{4 \sqrt[3]{\sqrt[4]{2^4} \times 2}} \\ &= \sqrt{4 \sqrt[12]{2^5}} = \sqrt{2^2 \cdot \sqrt[12]{2^5}} \\ &= \sqrt[12]{2^{24} \times 2^5} = \sqrt[12]{2^{29}} = 2^{\frac{29}{12}}\end{aligned}$$

따라서 $P = 12, q = 29$ 이므로 $p + q = 41$

3. $a > 0$ 이고 m, n, p 가 2이상의 정수일 때, 다음 중 옳지 않은 것은?

① $\sqrt[n]{a} = a^{\frac{1}{n}}$

② $\sqrt[2p]{a^{mp}} = \sqrt{a^m}$

③ $(\sqrt[n]{a})^m \cdot (\sqrt[m]{a})^n = \sqrt{a^{mn}}$

④ $\sqrt[m]{\sqrt[n]{a}} = a^{\frac{1}{mn}}$

⑤ $\frac{1}{a^{\frac{n}{m}}} = a^{-\frac{n}{m}}$

해설

$$(\sqrt[n]{a})^m \cdot (\sqrt[m]{a})^n = a^{\frac{m}{n}} \cdot a^{\frac{n}{m}} = a^{\frac{m}{n} + \frac{n}{m}} = a^{\frac{m^2 + n^2}{mn}}$$

4. $a > 0$ 일 때, $\sqrt[4]{\frac{\sqrt[3]{a}}{\sqrt{a}}} \times \sqrt{\frac{\sqrt[4]{a}}{\sqrt[3]{a}}} \times \sqrt[3]{\frac{a}{\sqrt[4]{a}}}$ 을 간단히 하면?

① $\sqrt{a}$

② $\sqrt[3]{a}$

③ $\sqrt[3]{a^2}$

④ $\sqrt[4]{a}$

⑤ $\sqrt[6]{a}$

해설

$$\begin{aligned}\sqrt[4]{\frac{\sqrt[3]{a}}{\sqrt{a}}} \times \sqrt{\frac{\sqrt[4]{a}}{\sqrt[3]{a}}} \times \sqrt[3]{\frac{a}{\sqrt[4]{a}}} &= \frac{\sqrt[12]{a}}{\sqrt[8]{a}} \times \frac{\sqrt[8]{a}}{\sqrt[6]{a}} \times \frac{\sqrt[3]{a}}{\sqrt[12]{a}} = \frac{\sqrt[3]{a}}{\sqrt[6]{a}} = \frac{\sqrt[6]{a^2}}{\sqrt[6]{a}} = \\ \sqrt[6]{\frac{a^2}{a}} &= \sqrt[6]{a}\end{aligned}$$

5. $a > 0, b > 0$ 일 때, $\sqrt{\frac{b}{a}} \sqrt{\frac{a}{b}} \sqrt{\frac{b}{a}}$ 을 간단히 하면?

① $\sqrt[8]{\frac{b^3}{a^3}}$

② $\sqrt[8]{\frac{a^3}{b^3}}$

③ $\sqrt[8]{\frac{b^3}{a^5}}$

④ $\sqrt[8]{\frac{b^5}{a^3}}$

⑤ $\sqrt[8]{\frac{a^5}{b^3}}$

해설

$$\begin{aligned}
 & \sqrt{\frac{b}{a}} \sqrt{\frac{a}{b}} \sqrt{\frac{b}{a}} \\
 &= \sqrt{\frac{b}{a}} \times \sqrt[4]{\frac{a}{b}} \times \sqrt[8]{\frac{b}{a}} \\
 &= \frac{b^{\frac{1}{2}}}{a^{\frac{1}{2}}} \times \frac{a^{\frac{1}{4}}}{b^{\frac{1}{4}}} \times \frac{b^{\frac{1}{8}}}{a^{\frac{1}{8}}} \\
 &= a^{\frac{1}{4} - \frac{1}{2} - \frac{1}{8}} \times b^{\frac{1}{2} + \frac{1}{8} - \frac{1}{4}} = a^{-\frac{3}{8}} \times b^{\frac{3}{8}} \\
 &= \frac{b^{\frac{3}{8}}}{a^{\frac{3}{8}}} = \frac{\sqrt[8]{b^3}}{\sqrt[8]{a^3}} = \sqrt[8]{\frac{b^3}{a^3}}
 \end{aligned}$$

6. $a = 2^{12}$ 일 때, $\sqrt{\frac{\sqrt[3]{a}}{\sqrt[4]{a}}} \times \sqrt[4]{\frac{\sqrt{a}}{\sqrt[3]{a}}}$ 의 값을 구하여라.

▶ 답 :

▷ 정답 : 2

해설

$$(a^{\frac{1}{3}-\frac{1}{4}})^{\frac{1}{2}} \times (a^{\frac{1}{2}-\frac{1}{3}})^{\frac{1}{4}} = a^{\frac{1}{24}} \times a^{\frac{1}{24}} = a^{\frac{1}{12}}$$

$a = 2^{12}$ 이므로

$$a^{\frac{1}{12}} = (2^{12})^{\frac{1}{12}} = 2$$

7. 양의 실수 a 에 대하여 $\sqrt{\frac{\sqrt[6]{a^7}}{\sqrt[4]{a}}} \times \frac{\sqrt{\sqrt{\sqrt{a}}}}{\sqrt[3]{\sqrt[4]{a}}} = \sqrt[n]{a^n}$ 이 성립할 때, 자연수 n 의 값은?

① 3

② 4

③ 6

④ 8

⑤ 16

해설

$$\begin{aligned}\sqrt{\frac{\sqrt[6]{a^7}}{\sqrt[4]{a}}} \times \frac{\sqrt{\sqrt{\sqrt{a}}}}{\sqrt[3]{\sqrt[4]{a}}} &= \frac{\sqrt{\sqrt[6]{a^7}}}{\sqrt{\sqrt[4]{a}}} \times \frac{\sqrt[8]{a}}{\sqrt[12]{a}} \\&= \frac{\sqrt[12]{a^7}}{\sqrt[8]{a}} \times \frac{\sqrt[8]{a}}{\sqrt[12]{a}} \\&= \frac{\sqrt[12]{a^7}}{\sqrt[12]{a}} = \sqrt[12]{\frac{a^7}{a}} \\&= \sqrt[12]{a^6} = \sqrt{a} = \sqrt[8]{a^4}\end{aligned}$$

$$\therefore n = 4$$

8. 세 수 $A = \sqrt[3]{\sqrt{100}}, B = \sqrt{5}, C = \sqrt[3]{\sqrt{121}}$ 의 대소 관계를 바르게 나타낸 것은?

① $A < B < C$

② $A < C < B$

③ $B < A < C$

④ $B < C < A$

⑤ $C < A < B$

해설

$$A = \sqrt[3]{\sqrt{100}} = \sqrt[3]{100^{\frac{1}{2}}} = 100^{\frac{1}{6}}$$

$$B = \sqrt{5} = 5^{\frac{1}{2}} = (5^3)^{\frac{1}{6}} = 125^{\frac{1}{6}}$$

$$C = \sqrt[3]{\sqrt{121}} = \sqrt[3]{121^{\frac{1}{2}}} = 121^{\frac{1}{6}}$$

이므로 A, B, C 의 대소 관계는 $A < C < B$ 이다

9. 다음 중 세 수 $\sqrt[3]{6}$, $\sqrt[4]{10}$, $\sqrt[6]{30}$ 을 작은 수부터 차례로 나열한 것은?

① $\sqrt[3]{6}$, $\sqrt[4]{10}$, $\sqrt[6]{30}$

② $\sqrt[4]{10}$, $\sqrt[3]{6}$, $\sqrt[6]{30}$

③ $\sqrt[6]{30}$, $\sqrt[3]{6}$, $\sqrt[4]{10}$

④ $\sqrt[6]{30}$, $\sqrt[4]{10}$, $\sqrt[3]{6}$

⑤ $\sqrt[4]{10}$, $\sqrt[6]{30}$, $\sqrt[3]{6}$

해설

거듭제곱의 성질을 이용하여 $\sqrt[12]{N}$ 의 꼴로 나타내면

$$\sqrt[3]{6} = \sqrt[12]{6^4}$$

$$\sqrt[4]{10} = \sqrt[12]{10^3}$$

$$\sqrt[6]{30} = \sqrt[12]{30^2}$$

그런데

$$\frac{6^4}{10^3} = \frac{(2 \times 3)^4}{(2 \times 5)^3} = \frac{2 \times 3^4}{5^3} > 1,$$

$$\frac{10^3}{30^2} = \frac{10}{9} > 1 \text{ 이므로}$$

$$6^4 > 10^3 > 30^2$$

따라서 작은 수부터 나열하면

$$\sqrt[6]{30}, \sqrt[4]{10}, \sqrt[3]{6}$$

10. 2 이상의 서로 다른 두 자연수 m, n 에 대하여
 $\sqrt[m]{100} \times \sqrt[n]{10} = 10$ 을 만족할 때, 두 자연수 m, n 의 합 $m+n$ 의 값은?

① 5

② 6

③ 7

④ 8

⑤ 9

해설

$$\sqrt[m]{100} \times \sqrt[n]{10} = 10^{\frac{2}{m}} \times 10^{\frac{1}{n}} = 10^{\frac{2}{m} + \frac{1}{n}} = 10$$

$$\therefore \frac{2}{m} + \frac{1}{n} = 1$$

$$2n + m = mn, (m-2)(n-1) = 2$$

m, n 은 $m \geq 2, n \geq 2$ 인 서로 다른 자연수이므로

$$m-2 \geq 0, n-1 \geq 1$$

$$\therefore m-2 = 2, n-1 = 1$$

$$\therefore m = 4, n = 2 \quad \therefore m+n = 6$$

11. $3^{\frac{5}{2}} \cdot (9^{\frac{7}{4}} + 27^{\frac{3}{2}}) \cdot 81^{-\frac{3}{2}}$ 를 계산하면?

① 3

② 4

③ 5

④ 6

⑤ 7

해설

$$3^{\frac{5}{2}} \cdot 9^{\frac{7}{4}} \cdot 81^{-\frac{3}{2}} + 3^{\frac{5}{2}} \cdot 27^{\frac{3}{2}} \cdot 81^{-\frac{3}{2}}$$

$$= 3^{\frac{5}{2}} \cdot 3^{\frac{7}{2}} \cdot 3^{-6} + 3^{\frac{5}{2}} \cdot 3^{\frac{9}{2}} \cdot 3^{-6}$$

$$= 3^{\frac{5}{2} + \frac{7}{2} - 6} + 3^{\frac{5}{2} + \frac{9}{2} - 6} = 3^0 + 3^1 = 1 + 3 = 4$$

12. $\left(\frac{1}{27}\right)^{\frac{1}{n}}$ 이 자연수가 되는 정수 n 의 개수는?

① 1

② 2

③ 3

④ 4

⑤ 0

해설

$$\left(\frac{1}{27}\right)^{\frac{1}{n}} = 3^{\frac{-3}{n}} \text{ 이 자연수}$$

$$n = -1 \text{ 일 때, } 3^3$$

$$n = -3 \text{ 일 때, } 3$$

$\Rightarrow 2$ 개

13. $2^x + \frac{1}{2^x} = 2$ 일 때, $8^x + \frac{1}{8^x}$ 의 값은?

① 2

② 3

③ 4

④ 5

⑤ 6

해설

$$8^x + \frac{1}{8^x} = (2^x)^3 + \left(\frac{1}{2^x}\right)^3$$

$$= \left(2^x + \frac{1}{2^x}\right)^3 - 3 \cdot 2^x \cdot \frac{1}{2^x} \left(2^x + \frac{1}{2^x}\right)$$

$$= 2^3 - 3 \cdot 2 = 2$$

14. $x^{\frac{1}{2}} - x^{-\frac{1}{2}} = 2$ 일 때, 다음 식의 값을 구하여라.

$$x^3 + x^{-3}$$

▶ 답 :

▷ 정답 : 198

해설

$$(x^{\frac{1}{2}} - x^{-\frac{1}{2}})^2 = 2^2$$

$$x - 2 + x^{-1} = 4$$

$$x + x^{-1} = 6$$

$$(x + x^{-1})^3 = x^3 + 3(x + x^{-1}) + x^{-3} = 216$$

$$x^3 + x^{-3} = 216 - 18 = 198$$

15. $x^{\frac{1}{2}} + x^{-\frac{1}{2}} = 3$ 일 때, $x^2 + x^{-2}$ 의 값을 구하면?

① 33

② 36

③ 43

④ 47

⑤ 49

해설

$$(x^{\frac{1}{2}} + x^{-\frac{1}{2}})^2 = 9$$

$$x + x^{-1} + 2 = 9$$

$$\therefore x + x^{-1} = 7$$

$$(x + x^{-1})^2 = 49$$

$$x^2 + x^{-2} + 2 = 49$$

$$\therefore x^2 + x^{-2} = 47$$

16. $a^{2x} = \sqrt{2} - 1$ 일 때, $\frac{a^{3x} + a^{-3x}}{a^x + a^{-x}}$ 의 값은?

① $\sqrt{2}$

② $2\sqrt{2}$

③ $\sqrt{2} - 1$

④ $2\sqrt{2} - 1$

⑤ $2\sqrt{2} - 2$

해설

$$a^{-2x} = \frac{1}{\sqrt{2} - 1} = \sqrt{2} + 1$$

주어진 식의 분모, 분자에 a^x 을 곱하면,

$$\begin{aligned}\frac{a^{4x} + a^{-2x}}{a^{2x} + 1} &= \frac{(\sqrt{2} - 1)^2 + (\sqrt{2} + 1)}{(\sqrt{2} - 1) + 1} \\ &= \frac{3 - 2\sqrt{2} + \sqrt{2} + 1}{\sqrt{2}} = \frac{4 - \sqrt{2}}{\sqrt{2}} = 2\sqrt{2} - 1\end{aligned}$$

17. $2^6 = a$, $9^4 = b$ 일 때, 12^5 를 a , b 에 관한 식으로 나타내면?

① $a^{\frac{5}{6}} b^{\frac{5}{8}}$

② $a^{\frac{5}{4}} b^{\frac{5}{4}}$

③ $a^{\frac{5}{3}} b^{\frac{5}{8}}$

④ $a^{\frac{5}{3}} b^{\frac{7}{8}}$

⑤ $a^{\frac{7}{4}} b^{\frac{3}{2}}$

해설

$$2^6 = a \text{ 에서 } 2 = a^{\frac{1}{6}}$$

$$9^4 = b \text{ 에서 } (3^2)^4 = 3^8 = b$$

$$\therefore 3 = b^{\frac{1}{8}}$$

$$\therefore 12^5 = (2^2 \times 3)^5 = 2^{10} \times 3^5 = (a^{\frac{1}{6}})^{10} \times (b^{\frac{1}{8}})^5 = a^{\frac{5}{3}} b^{\frac{5}{8}}$$

18. $9^x = 2$ 일 때, $\left(\frac{1}{27}\right)^{-4x}$ 의 값은?

① $\frac{1}{64}$

② $\frac{1}{16}$

③ 16

④ 64

⑤ 256

해설

$9^x = 2$ 이므로 $3^{2x} = 2$ 이다.

$$\begin{aligned} \text{(주어진 식)} &= (3^{-3})^{-4x} = 3^{12x} \\ &= (3^{2x})^6 = 2^6 = 64 \end{aligned}$$

19. $a^{2x} = 5$ 일 때, $\frac{a^{3x} + a^{-3x}}{a^x - a^{-x}}$ 의 값은?

① $\frac{21}{5}$

② $\frac{9}{2}$

③ $\frac{31}{5}$

④ $\frac{51}{5}$

⑤ $\frac{63}{10}$

해설

$$\begin{aligned}\frac{a^{3x} + a^{-3x}}{a^x - a^{-x}} &= \frac{a^{4x} + a^{-2x}}{a^{2x} - 1} \\ &= \frac{25 + \frac{1}{5}}{5 - 1} = \frac{\frac{126}{5}}{4} = \frac{126}{20} = \frac{63}{10}\end{aligned}$$

20. $20^a = 5\sqrt{3}$, $20^b = 2$ 일 때, $10^{\frac{2a}{1-b}}$ 의 값은?

① 25

② 35

③ 55

④ 65

⑤ 75

해설

주어진 조건과 같이 밑이 20이 되도록 구하려는 식을 변형한다.

$$10 = \frac{20}{2} = \frac{20}{20^b} = 20^{1-b}$$

$$\therefore 10^{\frac{2a}{1-b}} = (20^{1-b})^{\frac{2a}{1-b}} = 20^{2a} = (20^a)^2 = (5\sqrt{3})^2 = 75$$

21. 세 자연수 a, b, c 의 최대공약수가 3이고, 등식 $2^a \cdot 5^b = 400^c$ 을 만족할 때, $a + b + c$ 의 값을 구하여라.

▶ 답 :

▷ 정답 : 21

해설

$$400 = 2^4 \cdot 5^2 \text{ 이므로}$$

$$2^a \cdot 5^b = 400^c = (2^4 \cdot 5^2)^c = 2^{4c} \cdot 5^{2c}$$

$$\text{따라서, } a = 4c, b = 2c$$

a, b, c 의 최대공약수가 3이므로

$$c = 3, a = 12, b = 6$$

$$\therefore a + b + c = 12 + 6 + 3 = 21$$

22. $x^{\frac{1}{2}} + x^{-\frac{1}{2}} = 4$ 일 때 $x^{\frac{3}{2}} + x^{-\frac{3}{2}}$ 의 값은 a 이고, $x + x^{-1} = 7$ 일 때 $x^{\frac{1}{2}} + x^{-\frac{1}{2}}$ 의 값은 b 이다. $a + b$ 의 값을 구하여라.

▶ 답 :

▷ 정답 : $53 + 2\sqrt{2}$

해설

$$(x^{\frac{1}{2}} + x^{-\frac{1}{2}})^3 = 4^3$$

$$x^{\frac{3}{2}} + x^{-\frac{3}{2}} + 3(x^{\frac{1}{2}} + x^{-\frac{1}{2}}) = 64$$

$$x^{\frac{3}{2}} + x^{-\frac{3}{2}} = 64 - 3 \cdot 4 = 52$$

$$\therefore a = 52$$

$$(x^{\frac{1}{2}} + x^{-\frac{1}{2}})^2 = b^2$$

$$x + x^{-1} + 2(x^{\frac{1}{2}} + \frac{1}{x^{-\frac{1}{2}}}) = b^2$$

$$7 + 2b = b^2$$

$$b^2 - 2b - 7 = 0$$

$$b = 1 \pm 2\sqrt{2} \text{ 그런데 } b > 0 \text{ 이므로}$$

$$b = 1 + 2\sqrt{2} \therefore a + b = 53 + 2\sqrt{2}$$

23. 함수 $f(x) = \frac{a^x - a^{-x}}{a^x + a^{-x}}$ (단, $a \neq 1$ 인 양수)에 대하여 다음 물음에 답하여라.

a 가 $1 + \sqrt{3}$ 의 세제곱근 중 실수인 값이라 할 때, 등식 $f\left(\frac{3}{2}\right) = p + q\sqrt{3}$ 을 만족하는 유리수 p, q 에 대하여 $p + q$ 의 값은?

① -2

② -1

③ 0

④ 1

⑤ 2

해설

$a = \sqrt[3]{1 + \sqrt{3}}$ 이므로 $a^3 = 1 + \sqrt{3}$ 이다.

$$f(x) = \frac{a^x - a^{-x}}{a^x + a^{-x}} = \frac{a^{2x} - 1}{a^{2x} + 1} \text{이므로}$$

$$\begin{aligned} f\left(\frac{3}{2}\right) &= \frac{a^3 - 1}{a^3 + 1} = \frac{1 + \sqrt{3} - 1}{1 + \sqrt{3} + 1} \\ &= \frac{\sqrt{3}}{2 + \sqrt{3}} \\ &= \frac{\sqrt{3}(2 - \sqrt{3})}{(2 + \sqrt{3})(2 - \sqrt{3})} \\ &= -3 + 2\sqrt{3} \end{aligned}$$

$$\therefore p + q = -3 + 2 = -1$$

24. $2^x = 3^y = 5^z$ 이 성립할 때, $5^{\frac{z}{x}} + 2^{\frac{x}{y}} + 3^{\frac{y}{z}}$ 의 값은?

① 2

② 3

③ 5

④ 10

⑤ 20

해설

$2^x = 3^y = 5^z$ 에서

$2 = 5^{\frac{z}{x}}, 3 = 2^{\frac{x}{y}}, 5 = 3^{\frac{y}{z}}$

$\therefore 5^{\frac{z}{x}} + 2^{\frac{x}{y}} + 3^{\frac{y}{z}} = 2 + 3 + 5 = 10$

25. A 지역과 B 지역의 바다에서는 바닷물 속으로 내려갈수록, 빛의 세기가 각각 일정한 비율로 감소한다. A 지역의 바다에서는 빛이 바닷물 속을 200m 통과할 때마다 빛의 세기가 84% 씩 감소하였고, B 지역의 바다에서는 바닷물 속을 150m 통과할 때마다 빛의 세기가 84% 씩 감소하였다. 빛이 바닷물 속을 600m 통과할 때, A 지역과 B 지역에서의 빛의 세기의 비를 구하면?(단, B 지역의 해수면의 빛의 세기는 A 지역의 해수면의 빛의 세기의 2배이다.)

- ① 25 : 4 ② 25 : 6 ③ 25 : 7 ④ 25 : 8 ⑤ 25 : 9

해설

A 지역의 해수면에서의 빛의 세기를 a 라 하면 B 지역의 해수면의 빛의 세기는 $2a$ 이다.

A 지역의 빛의 세기	a		$a(0.16)$	
수심	0	150	200	300
B 지역의 빛의 세기	$2a$	$2a(0.16)$		$2a(0.16)^2$

A 지역의 빛의 세기	$a(0.16)^2$		$a(0.16)^3$
수심	400	450	600
B 지역의 빛의 세기		$2a(0.16)^3$	$2a(0.16)^4$

또한 A 지역은 200m마다 빛의 세기가 84% 씩 감소하므로 600m에서의 빛의 세기는 $(0.16)^3 a$ 이며, B 지역은 150m마다 빛의 세기가 84% 씩 감소하므로 600m에서의 빛의 세기는 $(0.16)^4 \cdot 2a$ 이다.

따라서, 빛이 600m를 통과할 때, A 지역과 B 지역에서의 빛의 세기의 비는

$$(0.16)^3 a : (0.16)^4 \cdot 2a = 1 : 0.16 \times 2 = 100 : 32 = 25 : 8$$