1. 일차방정식 $a^2x+1=a^4-x$의 해는? (단, a는 실수)

① a ② $a+1$ ③ $a-1$

④ a^2-1 ⑤ a^2+1

해설

$a^2x+1=a^4-x$ 에서 $a^2x+x=a^4-1$

$(a^2+1)x=(a^2-1)(a^2+1)$

$\therefore x=a^2-1(\because a^2+1>0)$

2. $|x+1|+|x-2|=x+3$을 만족하는 해의 합을 구하면?

▶ 답 :

▷ 정답 : 4

해설

i) $x<-1$일 때,

$-x-1-x+2=x+3$

$\therefore\ x=-\frac{2}{3}$ (모순)

ii) $-1\le x<2$일 때,

$x+1-x+2=x+3$

$\therefore\ x=0$

iii) $x\ge 2$일 때,

$x+1+x-2=x+3$

$\therefore\ x=4$

3. 다음 내용은 이차방정식에 대한 설명이다. 괄호 안에 알맞은 것은?

> (가) 를 계수로 갖는 이차방정식은 (나) 의 범위에서 항상 근을 갖는다. 따라서 (다) 를 계수로 갖는 이차식 ax^2+bx+c 는 (라) 의 범위에서는 반드시 (마) 의 곱으로 인수분해된다.

① (가) 복소수 (나) 복소수 (다) 실수 (라) 실수 (마) 이차식

② (가) 복소수 (나) 실수 (다) 복소수 (라) 실수 (마) 일차식

③ (가) 복소수 (나) 실수 (다) 실수 (라) 복소수 (마) 이차식

④ (가) 실수 (나) 복소수 (다) 실수 (라) 복소수 (마) 이차식

⑤ (가) 실수 (나) 복소수 (다) 실수 (라) 복소수 (마) 일차식

해설

(가) 실수, (나) 복소수, (다) 실수, (라) 복소수, (마) 일차식

4. 다음 이차방정식을 풀면?

$$(1-i)x^2+(1+i)x-2=0$$

① $x=-1$ 또는 $x=-i$
② $x=-1$ 또는 $x=-1-i$
③ $x=-1$ 또는 $x=-1+i$
④ $x=1$ 또는 $x=-1-i$
⑤ $x=1$ 또는 $x=-1+i$

해설

x^2 의 계수를 실수로 만들기 위해 양변에 $1+i$를 곱하면

$(1+i)(1-i)x^2+(1+i)^2x-2(1+i)=0$

$2x^2+2ix-2(1+i)=0$

$(x-1)\left\{x+(1+i)\right\}=0$

$\therefore x=1$ 또는 $x=-1-i$

5. 이차방정식 $x^2-4|x|-5=0$의 두 근의 곱은?

① -5 ② -10 ③ -15 ④ -20 ⑤ -25

해설

ⅰ) $x \geq 0$일 때,

$x^2-4x-5=(x-5)(x+1)=0$

$\therefore x=5$

ⅱ) $x<0$일 때,

$x^2+4x-5=(x+5)(x-1)=0$

$\therefore x=-5$

ⅰ), ⅱ)에서 두 근의 곱은 -25이다.

6. 이차방정식 $x^2 + 2|x| - 8 = 0$의 해는 ?

① $-2,\ 4$ ② $-2,\ 2$ ③ $-4,\ 4$
④ $-4,\ 2$ ⑤ $-4,\ -2,\ 2,\ 4$

해설

$x^2 + 2|x| - 8 = 0$에서
i) $x > 0$일 때,
$x^2 + 2x - 8 = 0,\ (x+4)(x-2) - 0$
$\therefore x = -4$ 또는 $x = 2$
그런데 $x > 0$이므로 $x = 2$
ii) $x < 0$일 때,
$x^2 + 2x - 8 = 0,\ (x-4)(x+2) = 0$
$\therefore x = 4$ 또는 $x = -2$
그런데 $x < 0$이므로 $x = -2$
i), ii)에서 구하는 해는 $-2,\ 2$

7. $1 < x < 4$일 때, 방정식 $x^2 + [x] = 4x$의 근의 개수는?(단, $[x]$는 x보다 크지 않은 최대 정수이다.)

① 1 개　② 2 개　③ 3 개　④ 4 개　⑤ 5 개

해설

(ⅰ) $1 < x < 2$일 때, $[x] = 1$이므로
$x^2 - 4x + 1 = 0 \quad \therefore x = 2 \pm \sqrt{3}$
이것은 모두 $1 < x < 2$를 만족하지 않으므로
근이 될 수 없다.
(ⅱ) $2 \le x < 3$일 때, $[x] = 2$이므로
$x^2 - 4x + 2 = 0, \ \therefore x = 2 \pm \sqrt{2}$
이것은 모두 $2 \le x < 3$를 만족하지 않으므로
근이 될 수 없다.
(ⅲ) $3 \le x < 4$일 때, $[x] = 3$이므로
$x^2 - 4x + 3 = 0, \ (x-1)(x-3) = 0$
$\therefore x = 1$ 또는 3
그런데 $3 \le x < 4$를 만족하는 것은 $x = 3$
따라서 주어진 식의 근은 1 개이다.

8. 이차방정식 $2[x]^2 + 3[x] + 1 = 0$의 해를 구하여라. (단, $[x]$는 x보다 크지 않은 최대의 정수이다.)

① $-1 \le x < 0$ ② $-1 \le x < 1$ ③ $-1 \le x < 2$
④ $0 \le x < 1$ ⑤ $0 \le x < 2$

해설

$2[x]^2 + 3[x] + 1 = ([x] + 1)(2[x] + 1) = 0$이므로

$[x] = -1$ 또는 $[x] = -\frac{1}{2}$

그런데 $[x]$은 정수이므로 $[x] = -1$

$\therefore -1 \le x < 0$

9. x에 대한 이차방정식 $x^2+px+q=0$의 한 근이 $2+\sqrt{3}$이 되도록 유리수 $p,\ q$를 정할 때, $p+q$의 값은?

① -4 ② -3 ③ -2 ④ 1 ⑤ 2

해설

$x^2+px+q=0$의 한 근이 $2+\sqrt{3}$이고
$p,\ q$가 유리수이면 남은 한 근은 $2-\sqrt{3}$이다.
두 근의 합 $-p=2+\sqrt{3}+2-\sqrt{3}=4$
$\therefore p=-4$
두 근의 곱 $q=(2+\sqrt{3})(2-\sqrt{3})=4-3=1$
$\therefore p+q=-4+1=-3$

10. $x^2-2x+3=0$의 두 근을 $\alpha,\ \beta$라고 할 때, $(\alpha^2-2\alpha)(\beta^2-2\beta)$의 값을 구하여라.

▶ 답 :

▷ 정답 : 9

해설

$x^2-2x+3=0$ 에서 근과 계수의 관계에 의해
$\alpha+\beta=2,\ \alpha\beta=3$
$(\alpha^2-2\alpha)(\beta^2-2\beta)$
$=\alpha^2\beta^2-2\alpha^2\beta-2\alpha\beta^2+4\alpha\beta$
$=(\alpha\beta)^2-2\alpha\beta(\alpha+\beta)+4\alpha\beta$
$=9-6\cdot 2+12=9$

11. x 에 대한 방정식 $ax^2+2x-a-2=0$ 의 근을 판별하면? (단, a 는 실수)

① 오직 한 실근을 갖는다.

② 항상 서로 다른 두 실근을 갖는다.

③ 중근을 갖는다.

④ 실근을 갖는다.

⑤ 허근을 갖는다.

해설

(i) $a=0$ 일 때 : $x=\dfrac{a+2}{2}$

(ii) $a\neq 0$ 일 때 : 판별식을 구한다.

$D'=1+a(a+2)=a^2+2a+1=(a+1)^2\geq 0$

$\therefore$ 주어진 방정식은 실근을 갖는다

12. 이차방정식 $x^2-2ax-3a=0$이 중근을 갖도록 하는 a의 값과 그 때의 중근을 구한 것은?

① $a=-3,\ x=-3$
② $a=-3,\ x=0$
③ $a=0,\ x=-3$
④ $a=3,\ x=0$
⑤ $a=3,\ x=3$

해설

$\frac{D}{4}=(-a)^2-(-3a)=0$

$a^2+3a=0,\ a(a+3)=0$

$a=-3$ 또는 0

(ⅰ) $a=-3$일 때,

$x^2+6x+9=0$

$(x+3)^2=0$

$\therefore x=-3$(중근)

(ⅱ) $a=0$일 때,

$x^2=0$

$\therefore x=0$

13. 방정식 $x^2-4x+y^2-8y+20=0$을 만족하는 실수 $x,\ y$에 대하여 $x+y$의 값을 구하여라.

▶ 답 :

▷ 정답 : 6

해설

$x^2-4x+y^2-8y+20=(x-2)^2+(y-4)^2=0$

$\therefore\ x=2,\ y=4$

$\therefore\ x+y=6$

해설

$x^2-4x+y^2-8y+20=0$이 실근을 가지므로

$D/4=4-(y^2-8y+20)\geq 0$

$y^2-8y+16\leq 0$

$(y-4)^2\leq 0,\ y=4$

준식에 대입하면 $x=2$

따라서 $x+y=6$

14. x에 관한 이차방정식 $x^2-4x-a+b=0$이 중근을 가질 때 $x^2-2(a-1)x+a^2+3b=5a-4$의 근을 판별하면?

① 중근
② 한 실근과 한 허근
③ 서로 다른 두 실근
④ 서로 같은 두 실근
⑤ 서로 다른 두 허근

해설

이차방정식 $x^2-4x-a+b=0$이 중근을 가지려면
$D'=4+a-b=0$
$\therefore b=a+4$
$x^2-2(a-1)x+a^2+3b=5a-4$
$x^2-2(a-1)x+a^2-2a+16=0$
$D'=(a-1)^2-(a^2-2a+16)=-15<0$
$\therefore$ 주어진 이차방정식은 서로 다른 두 허근을 갖는다.

15. 이차방정식 $2x^2-4x-3k=0$이 허근을 갖고, 동시에 $x^2+5x-2k=0$이 실근을 갖도록 하는 정수 k의 개수를 구하면?

① 1개　② 2개　③ 3개　④ 4개　⑤ 5개

해설

$2x^2-4x-3k=0$이 허근을 가질 조건은

$\frac{D}{4}=4+6k<0$

$\therefore\ k<-\frac{2}{3}\quad\cdots\cdots$ ㉠

$x^2+5x-2k=0$이 실근을 가질 조건은

$D=25+8k\ge 0$

$\therefore\ k\ge -\frac{25}{8}\quad\cdots\cdots$ ㉡

㉠, ㉡에서 $-\frac{25}{8}\le k<-\frac{2}{3}$

따라서, 정수 $k=-3,\ -2,\ -1$

$\therefore$ 정수 k의 개수는 3개

16. x에 대한 이차방정식 $x^2+(2m+a+b)x+m^2+ab=0$이 m의 값에 관계없이 항상 중근을 가질 때, 실수 $a+b$의 값을 구하여라.

▶ 답 :

▷ 정답 : 0

해설

$x^2+(2m+a+b)x+m^2+ab=0$

항상 중근을 가질 조건 : 판별식 $D=0$

$D=(2m+a+b)^2-4(m^2+ab)=0$

$4m^2+a^2+b^2+4ma+2ab+4mb-4m^2-4ab=0$

m에 관해 식을 정리하면

$(4a+4b)m+(a^2-2ab+b^2)=0$

$4a+4b=0, \quad a^2-2ab+b^2=0$

$\therefore a+b=0$

17. x 에 관한 이차식 $a(1+x^2)+2bx+c(1-x^2)$ 에서 $a,\ b,\ c$ 가 삼각형의 세 변의 길이를 나타낼 때, 이 이차식이 x 에 관한 완전제곱식이 되는 것은 이 삼각형이 어떠한 삼각형일 때인가?

① a 를 빗변으로 하는 직각삼각형

② c 를 빗변으로 하는 직각삼각형

③ $a=b$ 인 이등변삼각형

④ $b=c$ 인 이등변삼각형

⑤ 정삼각형

해설

준식을 정리하면,
$(a-c)x^2+2bx+a+c$
위의 식이 완전제곱식이 되려면
$D=0$ 이어야 하므로
$\frac{D}{4}=b^2-(a-c)(a+c)=0,$
즉 $b^2-a^2+c^2=0$
$\therefore\ a^2=b^2+c^2$
따라서, a 를 빗변으로 하는 직각삼각형

18. 이차방정식 $\sqrt{3}x^2-(\sqrt{3}+3)x+3=0$의 두 근을 a, b라 할 때, $a\times b$의 값은?

① $-\sqrt{3}$　② -1　③ 0　④ 1　⑤ $\sqrt{3}$

해설

주어진 식의 양변에 $\sqrt{3}$을 곱하면

$3x^2-(3+3\sqrt{3})x+3\sqrt{3}=0$

$x^2-(1+3)x+\sqrt{3}=0$

$(x-1)(x-\sqrt{3})=0$

$\therefore x=1$ 또는 $x=\sqrt{3}$

$\therefore a\times b=1\times\sqrt{3}=\sqrt{3}$

19. 이차식 $x^2-6x+10$ 를 복소수 범위에서 인수분해 한 것은?

① $(x-6+2i)(x-6-2i)$
② $(x-6+i)(x-6-i)$
③ $(x-3+2i)(x-3-2i)$
④ $(x-3+i)(x-3-i)$
⑤ $(x-3+2i)(x-3-i)$

해설

$x^2-6x+10=0$ 의 근은 $3\pm i$

$\therefore\ x^2-6x+10=(x-3+i)(x-3-i)$

20. 계수가 유리수인 이차방정식 $x^2 + px + q = 0$ 의 한 근이 $\sqrt{7 - 4\sqrt{3}}$ 일 때, $p + q$ 의 값을 구하여라.

▶ 답 :

▷ 정답 : -3

해설

$\sqrt{7 - 4\sqrt{3}} = \sqrt{7 - 2\sqrt{12}} = 2 - \sqrt{3}$ 이므로,
두 근은 $2 - \sqrt{3}$, $2 + \sqrt{3}$
$p = -$(두근의 합) $= -4$
$q =$ (두근의 곱) $= 1$
$\therefore p + q = -3$

21. 방정식 $x^2+3x+1=0$의 두 근을 α, β라 할 때, $(\alpha^2+5\alpha+1)(\beta^2-4\beta+1)$의 값은?

① -2 ② -4 ③ -8 ④ -14 ⑤ -17

해설

방정식 $x^2+3x+1=0$의 근이 α, β이므로
$\alpha^2+3\alpha+1=0$, $\beta^2+3\beta+1=0$
$\alpha^2+1=-3\alpha$, $\beta^2+1=-3\beta$
$\therefore$ $(\alpha^2+5\alpha+1)(\beta^2-4\beta+1)$
$=(-3\alpha+5\alpha)(-3\beta-4\beta)$
$=-14\alpha\beta$
근과 계수와의 관계에서 $\alpha\beta=1$이므로
(주어진 식)$=-14$

22. 이차방정식 $x^2-ax+b=0$의 두 근을 α, β라 할 때 $x^2-(2a+1)x+2=0$의 두 근은 $\alpha+\beta$, $\alpha\beta$이다. 이때, a^2+b^2의 값을 구하시오.

▶ 답 :

▷ 정답 : 5

해설

$x^2-ax+b=0$의 두 근이 α, β이므로

$\alpha+\beta=a,\ \alpha\beta=b\quad\cdots\cdots$ ㉠

또, $x^2-(2a+1)x+2=0$의 두 근이 $\alpha+\beta$, $\alpha\beta$이므로

$\alpha+\beta+\alpha\beta=2a+1,\quad(\alpha+\beta)\alpha\beta=2\quad\cdots\cdots$ ㉡

㉠, ㉡에서 $a+b=2a+1\quad\cdots\cdots$ ㉢

$ab=2\quad\cdots\cdots$ ㉣

㉢, ㉣를 연립하여 풀면

$a=1,\ b=2$ 또는 $a=-2,\ b=-1$

23. a, b, c는 모두 양수이다. 방정식 $ax^2 - bx + c = 0$의 해가 α, β일 때, 방정식 $cx^2 - bx + a = 0$의 해를 구하면?

① $\alpha,\ \beta$ ② $-\alpha,\ -\beta$ ③ $\frac{1}{\alpha},\ \frac{1}{\beta}$

④ $-\frac{1}{\alpha},\ -\frac{1}{\beta}$ ⑤ $\alpha,\ -\beta$

해설

$\alpha + \beta = \frac{b}{a},\ \alpha\beta = \frac{c}{a}$

$cx^2 - bx + a = 0$에서

(두 근의 합) $= \frac{b}{c} = \frac{\alpha + \beta}{\alpha\beta} = \frac{1}{\alpha} + \frac{1}{\beta}\ \left(\therefore \frac{b}{c} = \frac{\frac{b}{a}}{\frac{c}{a}} \right)$

(두 근의 곱) $= \frac{a}{c} = \frac{1}{\alpha\beta}$

따라서 구하는 두 근은 $\frac{1}{\alpha}, \frac{1}{\beta}$이다.

해설

$ax^2 - bx + c = 0$의 양변을 $x^2(\neq 0)$으로 나누면

$a - \frac{b}{x} + \frac{c}{x^2} = 0$

이 때, $\frac{1}{x} = t$라 놓으면, $ct^2 - bt + a = 0$

$t = \frac{1}{x} = \frac{1}{\alpha}$ 또는 $\frac{1}{\beta}$

$\therefore\ cx^2 - bx + a = 0$의 해는 $\frac{1}{\alpha}$ 또는 $\frac{1}{\beta}$이다.

24. 이차항의 계수가 1인 이차방정식에서 상수항을 1만큼 크게 하면 두 근이 같고, 상수항을 3만큼 작게 하면 한 근은 다른 근의 두 배가 된다고 한다. 이 때, 처음 방정식의 두 근의 제곱의 합을 구하여라.

▶ 답:

▷ 정답: 74

해설

처음 방정식을 $x^2 + bx + c = 0$이라 하면
$x^2 + bx + (c+1) = 0$의 근은 중근이 된다.
$\therefore\ D = b^2 - 4(c+1) = 0$
$\therefore\ b^2 = 4c + 4 \cdots\cdots$ ㉠
또, $x^2 + bx + (c-3) = 0$의 두 근은 $\alpha,\ 2\alpha$가 된다.
$\therefore\ \alpha + 2\alpha = -b \cdots\cdots$ ㉡
$\therefore\ \alpha \cdot 2\alpha = c - 3 \cdots\cdots$ ㉢
㉠, ㉡, ㉢에서 $b = \pm 12,\ c = 35$이므로
처음 방정식은 $x^2 \pm 12x + 35 = 0$
$\therefore\ x = -5$ 또는 $-7,\quad x = 5$ 또는 7
따라서 (두 근의 제곱의 합)$= (\pm 5)^2 + (\pm 7)^2 = 74$

25. 방정식 $x^2 + 2(m-1)x - m + 3 = 0$의 두 근을 모두 음이 되게 하는 실수 m의 범위를 정하면?

① $-2 < m < 3$　　② $2 \le m < 3$　　③ $-1 < m < 3$

④ $1 < m \le 3$　　⑤ $3 < m \le 4$

해설

두 근을 α, β라 할 때 두 근이 모두 음수이므로

(ⅰ) $\frac{D}{4} = (m-1)^2 + m - 3 \ge 0$

$m^2 - m - 2 \ge 0,\ (m-2)(m+1) \ge 0$

$\therefore\ m \le -1,\ m \ge 2$

(ⅱ) $\alpha + \beta = -2(m-1) < 0 \quad \therefore\ m > 1$

(ⅲ) $\alpha\beta = -m + 3 > 0 \quad \therefore\ m < 3$

$\therefore$ (ⅰ), (ⅱ), (ⅲ)의 공통범위는 $2 \le m < 3$