1. 두 집합 $A=\{3, 4,\ a+2\}$, $B=\{b+1,\ 5,\ 7\}$ 에 대하여 $A\cap B=\{4,\ 7\}$ 일 때, $a+b$ 의 값은?

① 8 ② 9 ③ 10 ④ 11 ⑤ 12

해설

$(A\cap B)\subset A$ 이고 $(A\cap B)\subset B$ 이므로
$a+2=7,\ b+1=4$ 이므로 $a=5,\ b=3,\ a+b=5+3=8$ 이다.

2. 전체집합 U와 두 부분집합 A, B에 대하여
$U = A \cup B$, $A = \{x \mid x$는 3의 배수$\}$, $B = \{x \mid x$는 45의 약수$\}$ 일 때,
$(A \cup B^c) \cap (A^c \cup B)$ 의 원소의 개수는?

① 1 ② 2 ③ 3 ④ 4 ⑤ 5

해설

$A = \{3, 6, 9, 12, 15, 18, \cdots\}$
$B = \{1, 3, 5, 9, 15, 45\}$
$A \cap B = \{3, 9, 15, 45\}$

3. $t=0$에서 $t=1$까지 인구는 $i\%$증가하였고, $t=1$에서 $t=2$까지 인구는 $j\%$증가하였다면, $t=0$에서 $t=2$까지 인구 증가율은?

① $(i+j)\%$

② $ij\%$

③ $(i+ij)\%$

④ $\left(i+j+\dfrac{ij}{100}\right)\%$

⑤ $\left(i+j+\dfrac{i+j}{100}\right)\%$

해설

$t=0$에서의 인구는 P

$t=2$까지 인구 증가율을 $k\%$라 하자.

$$P\left(1+\frac{k}{100}\right)$$

$$=P\left(1+\frac{i}{100}\right)\left(1+\frac{j}{100}\right),$$

$$1+\frac{k}{100}=1+\frac{i+j}{100}+\frac{ij}{10000}$$

$$\therefore k=i+j+\frac{ij}{100}$$

4. 10000 원짜리 지폐 2장, 5000 원짜리 지폐 2장, 1000 원짜리 지폐 3장이 있다. 이 지폐의 일부 또는 전부를 사용하여 지불할 수 있는 금액의 수는?

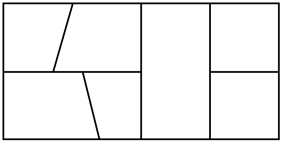
① 27 ② 35 ③ 42 ④ 60 ⑤ 81

해설

5000 원짜리 2장으로 지불할 수 있는 방법이 10000 원짜리 지폐 1장으로 지불할 수 있는 방법과 같으므로 10000 원짜리 지폐 2장을 5000 짜리 지폐 4장으로 바꾸면, 5000 짜리 지폐 6장, 1000 원짜리 지폐 3장으로 지불할 수 있는 방법과 같다.

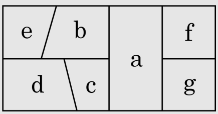
$\therefore 7 \times 4 - 1 = 27$

5. 빨강, 주황, 노랑, 초록, 파랑의 5 가지 색을 사용하여 다음 그림과 같은 도형의 각 면을 색칠하려고 한다. 변의 일부 또는 전부를 공유하는 두 면은 같은 색을 사용하지 않도록 할 때, 모든 면을 색칠하는 방법의 수는?



① 4020　② 5160　③ 6480　④ 7260　⑤ 8400

해설



a 에 색칠하는 방법의 수는 5 가지
b 에 색칠하는 방법의 수는 4 가지
c 에 색칠하는 방법의 수는 3 가지
d 에 색칠하는 방법의 수는 3 가지
e 에 색칠하는 방법의 수는 3 가지이므로
a, b, c, d, e 에 색칠하는 방법의 수는
$5 \times 4 \times 3 \times 3 \times 3 = 540$ (가지)
f 에 색칠하는 방법의 수는 4 가지
g 에 색칠하는 방법의 수는 3 가지 이므로
f, g 에 색칠하는 방법의 수는 $4 \times 3 = 12$ (가지)
따라서 구하는 방법의 수는
$540 \times 12 = 6480$ (가지)

6. 다음 표는 세계 각 국에서 사용하는 긴급구조대의 전화번호이다.

국가	한국	미국	호주	독일
전화번호	119	911	001	110

이들은 모두 0 부터 9 까지의 숫자로 이루어진 세 자리의 숫자이고, 이웃하는 어느 두 자리는 같은 숫자가 중복되어 있다. 이와 같이 세 자리의 숫자 중에서 이웃한 두 자리는 같은 숫자가 되는 전화번호의 종류는 모두 몇 가지인가?

① 160 ② 180 ③ 200 ④ 220 ⑤ 240

해설

이웃하는 방법에 따라 △△□, △□□ 의 두 가지 경우가 있고, △ 에 10가지 □가 9 가지이므로, 구하는 경우의 수는

$(10 \times 9) \times 2 = 180$

7. 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7 의 7 개의 숫자 중에서 서로 다른 세 숫자를 뽑을 때, 그 합이 홀수가 되는 경우의 수는?

① 12 ② 14 ③ 16 ④ 18 ⑤ 20

해설

홀수 4개, 짝수 3개 중에서 세 숫자를 뽑을 때,
세 수의 합이 홀수이므로
(i) (홀수+홀수+홀수) 인 경우 ${}_4C_3 = 4$(가지)
(ii) (홀수 +짝수+짝수) 인 경우 ${}_4C_1 \times {}_3C_2 = 12$(가지)
따라서, 합의 법칙에 의하여 구하는 경우의 수는
$4 + 12 = 16$(가지)

8. 세 집합 A, B, C 에 대하여 옳지 <u>않은</u> 것을 모두 고르면? (정답 2개)

① $A \subset B$, $B \subset C$ 이면 $A \subset C$ 이다.

② $A \subset B$, $B = C$ 이면 $A \subset C$ 이다.

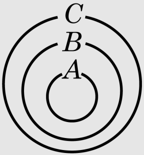
③ $A \subset B$, $B \subset C$ 이면 $A = B$ 이다.

④ $A \subset B$, $B \subset C$, $C \subset A$ 이면 $A = B = C$ 이다.

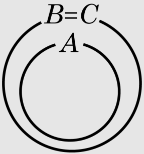
⑤ $A \subset B \subset C$ 이면 $n(A) < n(B) < n(C)$ 이다.

해설

①



②



③ 예를 들면 $A = \{1\}$, $B = \{1, 2\}$, $C = \{1,\ 2,\ 3\}$ 이면, $A \subset B$, $B \subset C$ 이지만 $A \neq B$

④ $A \subset B$, $B \subset C$, $C \subset A$ 이면, $A = B = C$

⑤ $A \subset B \subset C$ 이면, $n(A) \leq n(B) \leq n(C)$

9. 어떤 사건을 조사하는 과정에서 네 사람 A, B, C, D 중에서 한 명이 범인이라는 사실을 알았다. 용의자 네 명의 진술 중 옳은 것은 하나뿐일 때, 그 진술을 한 사람과 범인을 차례로 쓴 것은?

A : 범인은 B이다. B : 범인은 D이다. C : 나는 범인이 아니다. D : B 는 거짓말을 하고 있다.

① A, D ② B, C ③ C, B ④ D, C ⑤ B, A

해설

B가 옳은 진술이라면 범인은 D가 되고 C도 옳은 진술이 된다. 그러나 진실을 말한 사람은 한 명뿐이기 때문에 B는 거짓이 되고, D가 옳은 진술이 된다. D를 제외한 나머지 모두 거짓말이 되기 때문에 범인은 C다.

10. 두 조건 p, q 를 만족하는 집합을 각각 P, Q 라 하자. p 가 q 이기 위한 충분조건이지만 필요조건은 아닐 때, 다음 중 옳지 <u>않은</u> 것은?

① $Q^c \cap P^c = Q^c$　　② $P - Q = \varnothing$　　③ $P \cup Q = Q$

④ $Q - P = \varnothing$　　⑤ $P \cap Q = P$

해설

p 가 q 이기 위한 충분조건이므로 $P \subset Q$

p 가 q 이기 위한 필요조건이 아니므로 $Q \not\subset P$

$\therefore Q - P \neq \varnothing$

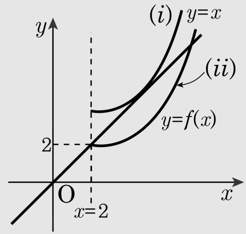
11. 함수 $f(x)=x^2-4x+k(x\geq 2)$의 그래프와 그 역함수 $y=f^{-1}(x)$의 그래프가 서로 다른 두 점에서 만날 때, 상수 k의 값의 범위는?

① $0<k<\frac{25}{4}$ ② $k<\frac{25}{4}$ ③ $6\leq k\leq\frac{25}{4}$

④ $6<k\leq\frac{25}{4}$ ⑤ $6\leq k<\frac{25}{4}$

해설

주어진 함수 $y=f(x)$의 그래프와 그 역함수 $y=f^{-1}(x)$의 그래프는 직선 $y=x$에 대하여 대칭이므로 두 함수의 그래프의 교점은 $y=x$위에 있다.



따라서, 조건을 만족하려면 $f(x)=x^2-4x+k=(x-2)^2+k-4(x\geq 2)$의 그래프와 직선 $y=x$가 서로 다른 두 점에서 만나야 한다.

(i) $y=f(x)$의 그래프와 직선 $y=x$가 접할 때,

$x^2-4x+k=x,\ x^2-5x+k=0$

이 이차방정식의 판별식을 D라 하면

$D=5^2-4k=0$

$\therefore \mathrm{k}=\frac{25}{4}$

(ii) $y=f(x)$의 그래프가 점 $(2,\ 2)$를 지날 때

$2^2-4\cdot 2+k=2$이므로 $k=6$

(i), (ii)에서 $6\leq k<\frac{25}{4}$

12. 세 자연수 $a,\ b,\ c$가 $\frac{2b}{a}=\frac{3c}{2b}=\frac{a}{3c}$를 만족하고 $a,\ b,\ c$의 최소공배수가 12일 때, $a+b+c$의 값은?

① 22　　② 20　　③ 18　　④ 16　　⑤ 14

해설

$a+2b+3c \neq 0$ ($\because a,\ b,\ c$는 자연수) 이므로

가비의 리에 의하여

$$\frac{2b}{a}=\frac{3c}{2b}=\frac{a}{3c}=\frac{a+2b+3c}{a+2b+3c}=1$$에서

$$a=3c,\ a=2b\ \ \therefore b=\frac{1}{2}a,\quad c=\frac{1}{3}a$$

$$\begin{aligned}\therefore a : b : c &= a : \frac{1}{2}a : \frac{1}{3}a\\ &= 6 : 3 : 2\end{aligned}$$

세 수의 최대공약수를 G라 하면

$a=6G,\ b=3G,\ c=2G$

(최소공배수)$=6G=12,\ G=2$

그러므로 $a=12,\ b=6,\ c=4$

$\therefore\ a+b+c=22$

13. 어떤 버스 회사에서 버스 요금을 $a\%$ 인상하면 승객의 수가 $b\%$ 감소되지만, 수입은 $x\%$ 증가한다고 한다. 이때, x를 a, b를 사용하여 나타내면?

① $x=\dfrac{(100+a)(100-b)}{100}$ ② $x=(100+a)(100-b)$

③ $x=\dfrac{a-b+1}{100}$ ④ $x=a-b-ab$

⑤ $x=a-b-\dfrac{ab}{100}$

해설

요금 인상 전의 버스 요금을 g, 승객의 수를 h라 하면 버스 회사 수입은 gh원이고 버스 요금을 $a\%$ 인상하면 승객의 수는 $b\%$ 감소된다.
인상 후의 버스 회사 수입은

$$g\left(1+\frac{a}{100}\right)\times h\left(1-\frac{b}{100}\right)$$

$$=\frac{100+a}{100}\times\frac{100-b}{100}\times gh\text{(원)}$$ 이므로

$$\frac{100+a}{100}\times\frac{100-b}{100}\times gh$$

$$=\left(1+\frac{x}{100}\right)\times gh$$

$$(100+a)(100-b)=100(100+x)$$

$$\therefore\ x=a-b-\frac{ab}{100}$$

14. 국어책 2권, 영어책 2권, 수학책 3권을 책꽂이에 일렬로 꽂을 때, 수학책끼리 이웃하지 않도록 꽂는 방법의 수는?

① 512 ② 700 ③ 816 ④ 1024 ⑤ 1440

해설

국어책, 영어책을 먼저 배열하고 그 사이 사이에 수학책 3 권을 배열하는 경우와 같다.

$\Rightarrow 4! \times {}_5 P_3 = 1440$

15. n명을 일렬로 세울 때, 이 중 특정한 세 명의 순서가 하나로 정해져 있다. 방법의 수는?

① $\dfrac{n!}{2}$ ② $\dfrac{n!}{6}$ ③ $n!$

④ $\dfrac{(n-1)!}{2}$ ⑤ $3(n-1)!$

해설

n명을 일렬로 세우는 방법의 수는 ${}_nP_n = n!$
그런데 여기에는 순서가 정해진 세 명이 자리를 바꾸는 경우의 수가 포함되어 있다.
즉, 세 명의 자리를 바꾸는 방법의 수만큼 배가 된 것이므로 세 명이 자리를 바꾸는 방법의 수로 나누면 된다.

따라서 구하는 방법의 수는 $\dfrac{n!}{3!} = \dfrac{n!}{6}$