1. $-3a-2<-3b-2$일 때, 다음 중 옳은 것은?

① $a<b$
② $-3a>-3b$
③ $5a-3>5b-3$
④ $3-a>3-b$
⑤ $\frac{a}{3}<\frac{b}{3}$

해설
$-3a-2<-3b-2\cdots$㉠
(㉠ $+2$) $\div(-3)$ 하면, $a>b$ 이다.
따라서 만족하는 식은 $5a-3>5b-3$

2. 연립방정식 $\begin{cases} x-2y=1 \\ xy-y^2=6 \end{cases}$ 의 해를 구하면 $x=p,\ y=q$ 또는 $x=r,\ y=s$ 이다. $p+q+r+s$ 의 값을 구하여라.

▶ 답 :

▷ 정답 : -1

해설

$$\begin{cases} x-2y=1 & \cdots ㉠ \\ xy-y^2=6 & \cdots ㉡ \end{cases}$$

㉠에서 $x=2y+1 \quad \cdots\cdots ㉢$

㉢을 ㉡에 대입하여 정리하면

$y^2+y-6=0(y-2)(y+3)=0$

$\therefore\ y=2,\ -3$

$y=2,\ y=-3$을 ㉢에 대입하면

각각 $x=5,\ x=-5$

$\therefore\ x=5,\ y=2$ 또는 $x=-5,\ y=-3$

3. 다음 중에서 성립하지 않는 것은?

① $a^2 \geq 0$
② $a^2 + b^2 \geq 0$
③ $a^2 = 0 \Leftrightarrow a = 0$
④ $a^2 + b^2 = 0 \Leftrightarrow a = b = 0$
⑤ $a > b \Leftrightarrow ab > 0$

해설

① $a^2 \geq 0$ (항상 성립)
② $a^2 + b^2 \geq 0$ (항상 성립)
③ $a^2 = 0 \Leftrightarrow a = 0$ (항상 성립)
④ $a^2 + b^2 = 0 \Leftrightarrow a = b = 0$ (항상 성립)
⑤ $a > b \Leftrightarrow ab > 0$
(반례 : $a > 0$, $b < 0$이면 $a > b$이지만 $ab < 0$이다.)

4. x에 대한 부등식 $ax+b \le bx+a$에 대하여 다음 중 옳은 것은? (단 a, b는 실수)

① $a > b > 0$일 때, 해는 $x \ge 1$이다.

② $a < b < 0$일 때, 해는 없다.

③ $a = b$ 일 때, 해는 모든 실수이다.

④ $a = b$ 일 때, 해는 없다.

⑤ $a = b$ 일 때, 해는 $x > 1$ 이다.

해설

$ax+b \le bx+a$ 에서 $(a-b)x \le a-b$

(i) $a > b$일 때, $a-b > 0$이므로 $x \le \dfrac{a-b}{a-b}$

$\therefore x \le 1$

(ii) $a = b$ 일 때, $a-b = 0$이므로 $0 \cdot x \le 0$

$\therefore$ 해가 무수히 많다

(iii) $a < b$일 때, $a-b < 0$이므로 $x \ge \dfrac{a-b}{a-b}$

$\therefore x \ge 1$

(i), (ii), (iii)에서 해는 모든 실수

5. 방정식 $x^3 - x^2 - 11x + 3 = 0$의 유리수 근이 아닌 두 근을 α, β라 할 때, $\sqrt{\alpha^2+1} + \sqrt{\beta^2+1}$의 값을 구하여라.

▶ 답 :

▷ 정답 : $2\sqrt{6}$

해설

$x^3 - x^2 - 11x + 3 = 0$

$(x+3)(x^2 - 4x + 1) = 0$

$\therefore\ x = -3,\ 2 \pm \sqrt{3}$

$\sqrt{\alpha^2+1} + \sqrt{\beta^2+1}$

$= \sqrt{(2+\sqrt{3})^2+1} + \sqrt{(2-\sqrt{3})^2+1}$

$= \sqrt{8+4\sqrt{3}} + \sqrt{8-4\sqrt{3}}$

$= \sqrt{8+2\sqrt{12}} + \sqrt{8-2\sqrt{12}}$

$= (\sqrt{6}+\sqrt{2}) + (\sqrt{6}-\sqrt{2}) = 2\sqrt{6}$

6. 사차방정식 $(x-1)(x-2)(x+2)(x+3)=-3$을 풀면?

① $x=\pm 2$ 또는 $x=2\pm 3\sqrt{6}$

② $x=\pm 4$ 또는 $x=\dfrac{-1\pm\sqrt{13}}{2}$

③ $x=\dfrac{3\pm\sqrt{3}i}{2}$ 또는 $x=\dfrac{-1\pm\sqrt{13}}{2}$

④ $x=\dfrac{-1\pm\sqrt{13}}{2}$ 또는 $x=\dfrac{-1\pm\sqrt{21}}{2}$

⑤ $x=\dfrac{-1\pm\sqrt{13}}{2}$ 또는 $x=\dfrac{-1\pm\sqrt{5}i}{2}$

해설

$(x-1)(x-2)(x+2)(x+3)=-3$에서

$(x-1)(x-2)(x+2)(x+3)+3=0$ 이므로

$(x^2+x-2)(x^2+x-6)+3=0$에서

$x^2+x=t$로 치환하면

$$\begin{aligned}(t-2)(t-6)+3&=t^2-8t+12+3\\&=t^2-8t+15\\&=(t-3)(t-5)=0\end{aligned}$$

따라서 $(x^2+x-3)(x^2+x-5)=0$

$x^2+x-3=0$ 에서

$x=\dfrac{-1\pm\sqrt{13}}{2}$

$x^2+x-5=0$ 에서

$x=\dfrac{-1\pm\sqrt{21}}{2}$

7. 사차식 $x^4 - 4x^2 - 12$ 를 복소수의 범위에서 인수분해하면?

① $(x+\sqrt{3})(x-\sqrt{3})(x+\sqrt{2}i)(x-\sqrt{2}i)$

② $(x+\sqrt{6})(x-\sqrt{6})(x+2i)(x-2i)$

③ $(x+\sqrt{6})(x-\sqrt{6})(x+\sqrt{2}i)(x-\sqrt{2}i)$

④ $(x+\sqrt{3})(x-\sqrt{3})(x+2i)(x-2i)$

⑤ $(x+\sqrt{2})(x-\sqrt{2})(x+\sqrt{6}i)(x-\sqrt{6}i)$

해설

$x^4 - 4x^2 - 12,\quad x^2 = Y$ 라 하자

$\Rightarrow\quad Y^2 - 4Y - 12 = (Y+2)(Y-6) = 0$

$Y = -2$ 또는 $Y = 6$

$\Rightarrow\quad x^2 = -2,\quad x^2 = 6$

$\Rightarrow\quad x = \pm\sqrt{2}i,\quad x = \pm\sqrt{6}$

$\therefore\ x^4 - 4x^2 - 12$

$= (x+\sqrt{6})(x-\sqrt{6})(x+\sqrt{2}i)(x-\sqrt{2}i)$

8. 사차방정식 $2x^4+7x^2-4=0$의 두 허근을 α, β라 할 때, $\frac{\beta}{\alpha}$의 값은?

① $1+i$　② i　③ 0　④ -1　⑤ 24

해설

$2x^4+7x^2-4=0$에서 $x^2=t$라 하면
$2t^2+7t-4=0$, $(2t-1)(t+4)=0$
$\therefore\ t=\frac{1}{2}$ 또는 $t=-4$
$\therefore\ x=\sqrt{\frac{1}{2}}$ 또는 $x=\pm 2i$
이 때, α, β는 허근이므로
$\alpha=2i, \beta=-2i$ 또는 $\alpha=-2i$, $\beta=2i$
$\therefore\ \frac{\beta}{\alpha}=-1$

9. 삼차방정식 $(x-1)(x^2+x+a+1)=0$의 실근이 1뿐일 때, 실수 a의 범위를 구하면?

① $a > -\frac{3}{4}$　　② $a > -\frac{3}{2}$　　③ $a > -1$

④ $a > 0$　　⑤ $a > 1$

해설

준식의 실근이 1뿐이기 위해서는 $x^2+x+a+1=0$의 근이 허근이거나 $x=1$을 중근으로 가져야 한다.

(ⅰ) 허근을 가질 경우

$D = 1-4(a+1) < 0$, $-3 < 4a$

$\therefore a > -\frac{3}{4}$

(ⅱ) $x=1$을 중근으로 가질 경우

$D = 1-4(a+1) = 0$이고 $1+1+a+1=0$을 동시에 만족하는 a의 값은 없다.

(ⅰ), (ⅱ)에서 $a > -\frac{3}{4}$

10. 삼차방정식 $x^3 - 2x^2 + 4x + 3 = 0$ 의 세 근을 α, β, γ 라 할 때, $(1-\alpha)(1-\beta)(1-\gamma)$ 의 값은?

① 2 ② 4 ③ 6 ④ 8 ⑤ 10

해설

$\alpha+\beta+\gamma=2$, $\alpha\beta+\beta\gamma+\gamma\alpha=4$, $\alpha\beta\gamma=-3$ 이므로

$(1-\alpha)(1-\beta)(1-\gamma)$

$=1-(\alpha+\beta+\gamma)+(\alpha\beta+\beta\gamma+\gamma\beta)-\alpha\beta\gamma$

$=1-2+4+3=6$

11. 삼차방정식 $x^3+ax^2+bx+5=0$ 의 한 근이 $2-i$ 일 때, 실수 a^2+b^2 의 값을 구하여라.

▶ 답 :

▷ 정답 : 10

해설

$x^3+ax^2+bx+5=0$ 의 세 근 : $2-i,\ 2+i,\ \alpha$
세 근의 합 : $-a=4+\alpha\cdots$①
세 근의 곱 : $-5=(2+i)(2-i)\alpha=5\alpha$
$\therefore \alpha=-1$, ①식에 대입하면 $a=-3$
$b=(2+i)(2-i)+(2+i)\cdot(-1)+(2-i)\cdot(-1)=5-4=1$
$\therefore a^2+b^2=10$

12. $x+y=1,\ xy=1$ 인 두 복소수 $x,\ y$ 에 대하여, $x^{2008}+y^{2008}$ 의 값은?

① 1　　② 2　　③ -1　　④ -2　　⑤ 0

해설

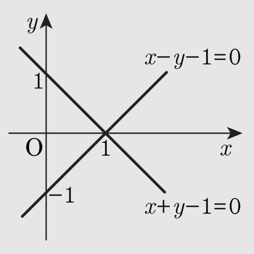
$x,\ y$ 는 $t^2-t+1=0$ 의 두 허근이므로
$(t+1)(t^2-t+1)=0$
$\therefore\ t^3+1=0$
$\therefore\ t^3=-1$
$x,\ y$ 는 $t^3+1=0$ 의 두 허근이므로
$x^3=-1,\ y^3=-1$
$\therefore x^{2008}+y^{2008}=(x^3)^{669}\cdot x+(y^3)^{669}\cdot y$
$=-(x+y)=-1$

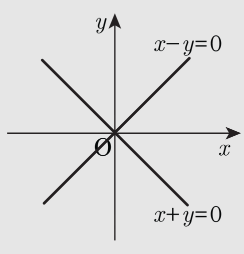
13. 좌표평면에서 두 영역 $(x+y-1)(x-y-1)=0$, $x^2-y^2=0$을 동시에 만족하는 $(x,\ y)$의 개수는?

① 무한히 많다. ② 0 개 ③ 1 개
④ 2 개 ⑤ 4 개

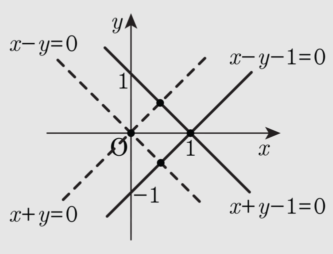
해설

두 영역을 좌표평면에 나타내면 다음과 같다.





이것을 하나의 좌표평면에 그리면



위에서 점선과 실선의 교점의 개수는 2 개이다.

14. 연립방정식 $\begin{cases} x-y=3 \\ x^2+2xy+y^2 \quad =1 \end{cases}$ 에서 xy 의 값을 구하여라.

▶ 답 :

▷ 정답 : -2

해설

$y=x-3$ 을 이차식에 대입하면
$x^2+2x(x-3)+(x-3)^2=1$
$x^2-3x+2=0$
$\therefore\ x=1, 2$
(i) $x=1$ 일 때 $y=-2$
(ii) $x=2$ 일 때 $y=-1$
따라서 $xy=-2$

15. 연립방정식 $\begin{cases} 2x^2+3xy-2y^2=0 \\ x^2+y^2=20 \end{cases}$ 의 해를 $x=\alpha,\ y=\beta$라 할 때, $\alpha+\beta$의 최솟값을 구하면?

① -8　② -6　③ -4　④ -2　⑤ 0

해설

$\begin{cases} (2x-y)(x+2y)=0 \\ x^2+y^2=20 \end{cases}$

1) $y=2x$일 때

$x^2+4x^2=5x^2=20 \ \therefore\ x=\pm2,\ y=\pm4$

2) $x=-2y$일 때

$4y^2+y^2=5y^2=20$

$\therefore\ y=\pm2,\ x=\mp4$ (복호동순)

$\therefore (x,\ y)=(2,\ 4),(-2,\ -4),(-4,\ 2),(4,\ -2)$

$\therefore\ \alpha+\beta=\ 6,\ -6,\ -2,\ 2$

그러므로 $\alpha+\beta$의 최솟값은 -6

16. 다음 연립방정식의 해가 <u>아닌</u> 것은?

$$\begin{cases} x^2 + xy - 2y^2 = 0 \\ x^2 + y^2 = 25 \end{cases}$$

① $x = 2\sqrt{5},\ y = -\sqrt{5}$ ② $x = -2\sqrt{5},\ y = \sqrt{5}$

③ $x = \frac{5\sqrt{2}}{2},\ y = \frac{5\sqrt{2}}{2}$ ④ $x = -\frac{5\sqrt{2}}{2},\ y = \frac{5\sqrt{2}}{2}$

⑤ $x = -\frac{5\sqrt{2}}{2},\ y = -\frac{5\sqrt{2}}{2}$

해설

$x^2 + xy - 2y^2 = 0$

$\Rightarrow \quad (x-y)(x+2y) = 0$

ⅰ) $x = y$ $x^2 + y^2 = 2y^2 = 25$

$y = \pm\frac{5\sqrt{2}}{2},\ x = \pm\frac{5\sqrt{2}}{2}$

ⅱ) $x = -2y$

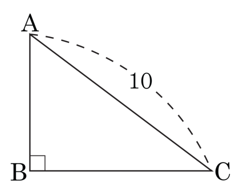
$x^2 + y^2 = 5y^2 = 25$

$y^2 = 5$ $y = \pm\sqrt{5},\ x = \mp 2\sqrt{5}$

$\therefore$ 해: $\left(\frac{5\sqrt{2}}{2},\ \frac{5\sqrt{2}}{2}\right),\ \left(-\frac{5\sqrt{2}}{2},\ -\frac{5\sqrt{2}}{2}\right)$

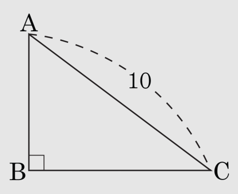
$(-2\sqrt{5},\ \sqrt{5}),\ (2\sqrt{5},\ -\sqrt{5})$

17. 다음 그림의 직각삼각형 ABC 에서 둘레의 길이가 24 이고, 빗변의 길이가 10 이다. 이때, 두 선분 AB 와 BC 의 길이의 곱을 구하면?



① 48 ② 40 ③ 32
④ 18 ⑤ 12

해설



$\overline{\mathrm{AB}} = a, \overline{\mathrm{BC}} = b$

둘레의 길이가 24 이므로

$24 = a + b + 10$

$a + b = 14$

직각삼각형이므로,

$a^2 + b^2 = 10^2$

$(a+b)^2 = a^2 + b^2 + 2ab$

$ab = \frac{1}{2}\{(a+b)^2 - (a^2+b^2)\}$

$= \frac{1}{2}\left\{14^2 - 10^2\right\} = \frac{1}{2} \cdot 96 = 48$

18. 0이 아닌 실수 $x,\ y$ 가 $(x^2+1)(y^2+4a^2)-8axy=0$을 만족할 때, x에 관한 이 방정식은 실수 a에 관계없이 일정한 근을 갖는다. 그 근을 모두 구하여라. $(a \neq 0)$

▶ 답 :

▶ 답 :

▷ 정답 : 1

▷ 정답 : −1

해설

$(x^2+1)(y^2+4a^2)-8axy=0$에서
$x^2y^2+4a^2x^2+y^2+4a^2-8axy=0$
$(x^2y^2-4axy+4a^2)+(y^2-4axy+4a^2x^2)=0$
$(xy-2a)^2+(y-2ax)^2=0$
$xy-2a,\ y-2ax$는 실수이므로
$xy-2a=0,\ y-2ax=0$
$\therefore\ xy=2a,\ y=2ax$
두 식을 연립하면, $2ax^2=2a$
$(a \neq 0)$이므로 $x^2=1,\ x=\pm1$

19. 방정식 $2x+5y=84$를 만족하는 양의 정수 x, y의 해 중에서 x의 최댓값을 구하면?

① 36 ② 37 ③ 38 ④ 39 ⑤ 40

해설

준식을 y에 대하여 정리하면

$y=\dfrac{84-2x}{5}=\dfrac{2(42-x)}{5}$ ······㉠

㉠에서 y가 양의 정수이므로 $42-x$가 5의 배수이다.

따라서, $x=2,\ 7,\ \cdots,\ 37$

$\therefore$ x의 최댓값은 37

20. $\dfrac{1}{\sqrt{-2}-\sqrt{-1}}$ 의 값은 ?

① $1-\sqrt{2}$ ② $-1-\sqrt{2}$ ③ $(1+\sqrt{2})i$

④ $-(1+\sqrt{2})i$ ⑤ $(1-\sqrt{2})i$

해설

$$\frac{1}{\sqrt{-2}-\sqrt{-1}} = \frac{1}{\sqrt{2}-1}\times\frac{1}{i}$$
$$= (\sqrt{2}+1)\times(-i)$$
$$= -(1+\sqrt{2})i$$

21. 복소수 $z=(1+i)x^2+(5+2i)x+3(2-i)$ 에서 z가 순허수일 때, 실수 x의 값은? (단, $i=\sqrt{-1}$)

① -3 ② -2 ③ -1 ④ 0 ⑤ 1

해설

$z=(x^2+5x+6)+(x^2+2x-3)i$

$\quad =(x+2)(x+3)+(x-1)(x+3)i$

순허수가 되려면 실수부$=0$, 허수부$\neq 0$

$\therefore\ x=-2$

22. $\dfrac{2x+3a}{4x+2}$ 가 x에 관계없이 일정한 값을 가질 때, a의 값을 구하던?
$\left(단,\ x \neq -\dfrac{1}{2}\right)$

① 1 ② $\dfrac{1}{2}$ ③ $\dfrac{1}{3}$ ④ $\dfrac{1}{4}$ ⑤ $\dfrac{1}{5}$

해설

$\dfrac{2x+3a}{4x+2} = k$ (일정) 라 놓으면
$2x+3a = k(4x+2)$ 에서 $(2-4k)x+(3a-2k)=0$
이 식은 x에 대한 항등식이므로
$2-4k=0$, $3a-2k=0$
$\therefore\ k=\dfrac{1}{2}$ 이므로 $a=\dfrac{1}{3}$

23. 대각선의 길이가 28이고, 모든 모서리의 길이의 합이 176인 직육면체의 겉넓이를 구하려 할 때, 다음 중에서 사용되는 식은?

① $(x-a)(x-b)(x-c)=x^3-(a+b+c)x^2+(ab+bc+ca)x-abc$

② $\frac{1}{2}\{(a-b)^2+(b-c)^2+(c-a)^2\}=a^2+b^2+c^2-ab-bc-ca$

③ $(a+b+c)^2=a^2+b^2+c^2+2ab+2bc+2ca$

④ $(x+a)(x+b)(x+c)=x^3+(a+b+c)x^2+(ab+bc+ca)x+abc$

⑤ $(a+b+c)(a^2+b^2+c^2-ab-bc-ca)=a^3+b^3+c^3-3abc$

해설

직육면체의 대각선의 길이가 28 이므로
가로를 a, 세로를 b, 높이를 c 라고 했을 때
$(a^2+b^2)+c^2=28^2$
모든 모서리의 길이의 합이 176이므로
$a+b+c=44$
따라서 ③번과 같은 식을 사용하여 겉넓이를 구할 수 있다.

24. 삼차식 $f(x) = x^3 + ax^2 + bx + c$는 $f(1) = 2,\ f(2) = 4,\ f(3) = 6$을 만족한다. $f(x)$를 $x - 4$로 나누었을 때 나머지는?

① 8　　② 10　　③ 12　　④ 14　　⑤ 2

해설

$f(1) = 1 + a + b + c = 2$
$f(2) = 8 + 4a + 2b + c = 4$
$f(3) = 27 + 9a + 3b + c = 6$
세 식을 연립하면,
$a = -6, b = 13, c = -6$
$\therefore\ f(x) = x^3 - 6x^2 + 13x - 6$
$\therefore\ f(4) = 64 + 16 \times (-6) + 4 \times 13 - 6 = 14$

25. 두 이차방정식 $x^2+kx+3=0$, $x^2+x+3k=0$이 공통인 실근 α를 가질 때, $\alpha-k$의 값을 구하여라.

▶ 답 :

▷ 정답 : 7

해설

공통근이 α이므로
$\alpha^2+k\alpha+3=0 \quad \cdots\cdots$ ㉠
$\alpha^2+\alpha+3k=0 \quad \cdots\cdots$ ㉡
㉠ − ㉡에서 $(k-1)\alpha-3(k-1)=0$,
$(k-1)(\alpha-3)=0$
(i) $k=1$인 경우 두 이차방정식이 $x^2+x+3=0$으로 일치하여 공통근은 갖지만 실근이 아니므로 부적합하다.
(ii) $\alpha=3$인 경우 $9+3k+3=0 \quad \therefore\ k=-4$
$\therefore\ \alpha-k=7$