

1. 은정이는 5회에 걸친 사회 시험에서 4회까지 83점, 84점, 79점, 90점을 받았고, 5회는 병결로 인해 4회까지의 평균 성적의 50%를 받았다. 은정이의 5회에 걸친 사회시험 성적의 평균은?

- ① 72 점 ② 73.2 점 ③ 75.6 점
④ 77.8 점 ⑤ 82 점

해설

$$4 \text{ 회 } \text{까지의 평균} : \frac{83 + 84 + 79 + 90}{4} = \frac{336}{4} = 84(\text{점})$$

$$5 \text{ 회 } \text{성적} : 84 \times \frac{50}{100} = 42(\text{점})$$

(5 회에 걸친 사회 성적의 평균)

$$= \frac{83 + 84 + 79 + 90 + 42}{5} = \frac{378}{5} = 75.6(\text{점})$$

2. x, y, z 의 평균이 5이고 분산이 2일 때, 세 수 x^2, y^2, z^2 의 평균은?

① 20

② 23

③ 24

④ 26

⑤ 27

해설

세 수 x, y, z 의 평균이 5이므로

$$\frac{x+y+z}{3} = 5$$

$$\therefore x+y+z = 15 \cdots \textcircled{1}$$

$$\text{또, 분산이 2이므로 } \frac{(x-5)^2 + (y-5)^2 + (z-5)^2}{3} = 2$$

$$(x-5)^2 + (y-5)^2 + (z-5)^2 = 6$$

$$\therefore x^2 + y^2 + z^2 - 10(x+y+z) + 75 = 6$$

위 식에 $\textcircled{1}$ 을 대입하면

$$x^2 + y^2 + z^2 - 10(15) + 75 = 6$$

$$x^2 + y^2 + z^2 = 81$$

따라서 $x^2 + y^2 + z^2$ 의 평균은 $\frac{81}{3} = 27$ 이다.

3. 다음 표는 S 중학교 5 개의 학급에 대한 학생들의 미술 실기 점수의 평균과 표준편차를 나타낸 것이다. 다음 설명 중 옳지 않은 것은? (단, 각 학급의 학생 수는 모두 같다.)

학급	A	B	C	D	E
평균(점)	77	77	73	70	82
표준편차	2,2	$2\sqrt{2}$	$\frac{\sqrt{10}}{2}$	$\sqrt{4,5}$	$\sqrt{5}$

- ① A 학급의 학생의 성적이 B 학급의 학생의 성적보다 더 높은 편이다.
- ② 고득점자는 A 학급보다 B 학급이 더 많다.
- ③ B의 표준편차가 A의 표준편차보다 크므로 변량이 평균주위에 더 집중되는 것은 B이다.
- ④ 가장 성적이 높은 학급은 C 학급이다.
- ⑤ D 학급의 학생의 성적이 평균적으로 A 학급의 학생의 성적보다 낮은 편이다.

해설

표준편차를 근호를 이용하여 나타내면 다음과 같다.

학급	A	B	C	D	E
표준 편차	$2,2$ $=\sqrt{4,84}$	$2\sqrt{2}$ $=\sqrt{8}$	$\frac{\sqrt{10}}{2}$ $=\sqrt{\frac{10}{4}}$ $=\sqrt{2,5}$	$\sqrt{4,5}$	$\sqrt{5}$

- ③ 표준편차가 작을수록 변량이 평균 주위에 더 집중된다. 따라서 변량이 평균주위에 더 집중되는 것은 A이다.

4. 다음 표는 5 개의 학급 A, B, C, D, E에 대한 학생들의 수학 점수의 평균과 표준편차를 나타낸 것이다. 다음 설명 중 옳은 것을 모두 고르면? (단, 각 학급의 학생 수는 모두 같다.)

학급	A	B	C	D	E
평균(점)	67	77	73	67	82
표준편차	2,1	$\sqrt{2}$	$\frac{\sqrt{10}}{3}$	$\sqrt{4,4}$	$\sqrt{3}$

- ① A 학급의 학생의 성적이 B 학급의 학생의 성적보다 더 고른 편이다.
- ② B 학급의 학생의 성적이 D 학급의 학생의 성적보다 더 고른 편이다.
- ③ 중위권 성적의 학생은 A 학급보다 C 학급이 더 많다.
- ④ 가장 성적이 고른 학급은 E 학급이다.
- ⑤ D 학급의 학생의 성적이 평균적으로 C 학급의 학생의 성적보다 높은 편이다.

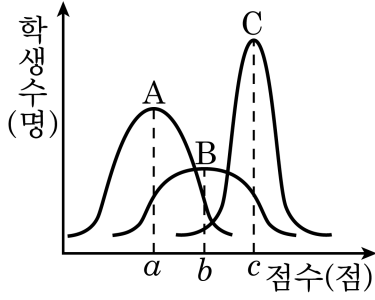
해설

표준편차를 근호를 이용하여 나타내면 다음과 같다.

학급	A	B	C	D	E
표준 편차	2,1 $=\sqrt{4,41}$	$\sqrt{2}$	$\frac{\sqrt{10}}{3}$ $=\sqrt{\frac{10}{9}}$ $=\sqrt{1,1}$	$\sqrt{4,4}$	$\sqrt{3}$

- ① B 학급의 학생의 성적이 A 학급의 학생의 성적보다 더 고른 편이다.
- ④ 가장 성적이 고른 학급은 C 학급이다.
- ⑤ C 학급의 학생의 성적이 평균적으로 D 학급의 학생의 성적보다 높은 편이다.

5. 다음 그림은 A, B, C 세 학급의 수학 성적을 나타낸 그래프이다. 다음 설명 중 옳지 않은 것은?



- ① B반 성적은 A반 성적보다 평균적으로 높다.
- ② 그래프에서 가장 많이 분포되어 있는 곳이 평균이다.
- ③ C반 성적이 가장 고르다.
- ④ 평균 주위에 가장 밀집된 반은 A반이다.
- ⑤ B반보다 A반의 성적이 고르다.

해설

평균 주위에 가장 밀집된 반은 C반이므로 C반 성적이 가장 고르다.

6. 지호네 반 학생 40 명의 몸무게의 평균은 60 kg 이다. 두명의 학생이 전학을 간 후 나머지 38 명의 몸무게의 평균이 59.5 kg 이 되었을 때, 전학을 간 두 학생의 몸무게의 평균은?

- ① 62.5 kg ② 65.5 kg ③ 67 kg
④ 69 kg ⑤ 69.5 kg

해설

40 명의 몸무게의 총합 : $60 \times 40 = 2400$ (kg)

전학생 2명을 뺀 38 명의 몸무게의 총합 : $59.5 \times 38 = 2261$ (kg)

전학생 2명의 몸무게의 총합 : $2400 - 2261 = 139$ (kg)

$\therefore$ (전학생 2명의 몸무게의 평균) = $\frac{139}{2} = 69.5$ (kg)

7. 세 수 x, y, z 의 평균과 분산이 각각 4, 2 일 때, x^2, y^2, z^2 의 평균은?

- ① $\frac{50}{3}$ ② $\frac{51}{3}$ ③ $\frac{52}{3}$ ④ $\frac{53}{3}$ ⑤ 18

해설

세 수 x, y, z 의 평균이 4 이므로

$$\frac{x+y+z}{3} = 4$$

$$\therefore x+y+z = 12 \quad \cdots \cdots \textcircled{1}$$

또한, x, y, z 의 분산이 2 이므로

$$\frac{(x-4)^2 + (y-4)^2 + (z-4)^2}{3} = 2$$

$$(x-4)^2 + (y-4)^2 + (z-4)^2 = 6$$

$$x^2 - 8x + 16 + y^2 - 8y + 16 + z^2 - 8z + 16 = 6$$

$$x^2 + y^2 + z^2 - 8(x+y+z) + 48 = 6$$

위의 식에 $\textcircled{1}$ 을 대입하면

$$x^2 + y^2 + z^2 - 8 \times 12 + 48 = 6$$

$$\therefore x^2 + y^2 + z^2 = 54 \text{ 따라서 } x^2, y^2, z^2 \text{ 의 평균은}$$

$$\frac{x^2 + y^2 + z^2}{3} = \frac{54}{3} = 18 \text{ 이다.}$$

8. 네 개의 변량 4, 6, a , b 의 평균이 5 이고, 분산이 3 일 때, 7, a^2 , b^2 , 9 의 평균은?

- ① 16 ② 17 ③ 19 ④ 21 ⑤ 23

해설

변량 4, 6, a , b 의 평균이 5 이므로

$$\frac{4+6+a+b}{4} = 5, \quad a+b+10 = 20$$

$$\therefore a+b = 10 \quad \dots\dots\textcircled{\text{㉠}}$$

또한, 분산이 3 이므로

$$\frac{(4-5)^2 + (6-5)^2 + (a-5)^2 + (b-5)^2}{4} = 3$$

$$\frac{1+1+a^2-10a+25+b^2-10b+25}{4} = 3$$

$$\frac{a^2+b^2-10(a+b)+52}{4} = 3$$

$$a^2+b^2-10(a+b)+52 = 12$$

$$\therefore a^2+b^2-10(a+b) = -40 \quad \dots\dots\textcircled{\text{㉡}}$$

②의 식에 ㉠을 대입하면

$$\therefore a^2+b^2 = 10(a+b) - 40 = 10 \times 10 - 40 = 60$$

따라서 7, a^2 , b^2 , 9 의 평균은

$$\frac{7+a^2+b^2+9}{4} = \frac{16+60}{4} = 19 \text{이다.}$$

9. 네 수 5, 7, x , y 의 평균이 4 이고, 분산이 3 일 때, 5 , $2x^2$, $2y^2$, 7 의 평균은?

- ① 2
- ② 4
- ③ 6
- ④ 8
- ⑤ 10

해설

변량 5, 7, x , y 의 평균이 4 이므로
$$\frac{5+7+x+y}{4}=4, \quad x+y+12=16$$
$$\therefore x+y=4 \quad \cdots \cdots \textcircled{1}$$
또한, 분산이 3 이므로
$$\frac{(5-4)^2+(7-4)^2+(x-4)^2+(y-4)^2}{4}=3,$$
$$\frac{1+9+x^2-8x+16+y^2-8y+16}{4}=3,$$
$$\frac{x^2+y^2-8(x+y)+42}{4}=3$$
$$x^2+y^2-8(x+y)+42=12$$
$$\therefore x^2+y^2-8(x+y)=-30 \quad \cdots \cdots \textcircled{2}$$
$$\textcircled{2} \text{의 식에 } \textcircled{1} \text{을 대입하면}$$
$$\therefore x^2+y^2=8(x+y)-30=8\times 4-30=2$$
따라서 5, $2x^2$, $2y^2$, 7 의 평균은
$$\frac{5+2x^2+2y^2+7}{4}=\frac{12+2(x^2+y^2)}{4}=\frac{12+4}{4}=4 \text{ 이다.}$$

10. 다섯 개의 변량 5, 6, x, y, 7 의 평균이 8 이고, 분산이 5 일 때,
2, 3, $\frac{1}{5}x^2$, $\frac{1}{5}y^2$ 의 평균은?

- ① 5 ② 7 ③ 9 ④ 11 ⑤ 13

해설

다섯 개의 변량 5, 6, x, y, 7 의 평균이 8 이므로

$$\frac{5+6+x+y+7}{5}=8, \quad x+y+18=40$$

$\therefore x+y=22 \quad \cdots \cdots \textcircled{㉠}$

또, 분산이 5 이므로

$$\frac{(5-8)^2+(6-8)^2+(x-8)^2+(y-8)^2}{5}+\frac{(7-8)^2}{5}=5$$
$$\frac{9+4+x^2-16x+64+y^2-16y+64+1}{5}=5$$
$$\frac{x^2+y^2-16(x+y)+142}{5}=5$$
$$x^2+y^2-16(x+y)+142=25$$

$\therefore x^2+y^2-16(x+y)=-117 \quad \cdots \cdots \textcircled{㉡}$

㉡의 식에 ㉠을 대입하면

$$x^2+y^2=16(x+y)-117=16\times 22-117$$

$\therefore x^2+y^2=235$

따라서 1, 2, $\frac{1}{5}x^2$, $\frac{1}{5}y^2$ 의 평균은

$$\frac{1}{4}\left(2+3+\frac{x^2}{5}+\frac{y^2}{5}\right)=\frac{1}{4}\left\{5+\frac{1}{5}(x^2+y^2)\right\}=13 \text{ 이다.}$$

11. 세 수 x, y, z 의 평균과 분산이 각각 4, 2 일 때, $3x, 3y, 3z$ 의 분산은?

- ① 14 ② 16 ③ 18 ④ 20 ⑤ 22

해설

세 수 x, y, z 의 평균이 4 이므로

$$\frac{x+y+z}{3} = 4$$

$$\therefore x+y+z = 12 \quad \cdots \cdots \textcircled{1}$$

또한, x, y, z 의 분산이 2 이므로

$$\frac{(x-4)^2 + (y-4)^2 + (z-4)^2}{3} = 2$$

$$(x-4)^2 + (y-4)^2 + (z-4)^2 = 6$$

$$x^2 - 8x + 16 + y^2 - 8y + 16 + z^2 - 8z + 16 = 6$$

$$x^2 + y^2 + z^2 - 8(x+y+z) + 48 = 6$$

위의 식에 $\textcircled{1}$ 을 대입하면

$$x^2 + y^2 + z^2 - 8 \times 12 + 48 = 6$$

$$\therefore x^2 + y^2 + z^2 = 54$$

한편, $3x, 3y, 3z$ 의 평균은

$$\frac{3x+3y+3z}{3} = \frac{3(x+y+z)}{3} = \frac{3 \times 12}{3} = 12$$

따라서 분산은

$$\frac{(3x-12)^2 + (3y-12)^2 + (3z-12)^2}{3}$$

$$= \frac{9x^2 + 9y^2 + 9z^2 - 72(x+y+z) + 144 \times 3}{3}$$

$$= \frac{9 \times 54 - 72 \times 12 + 432}{3} = \frac{54}{3}$$

$$= 18$$

12. 세 개의 변량 a, b, c 의 평균을 M , 표준편차를 S 라고 할 때, $a + 1, b + 1, c + 1$ 의 평균과 분산을 차례대로 나열한 것은?

① M, S^2

② $M, S^2 + 1$

③ $M + 1, S^2$

④ $M + 1, S^2 + 1$

⑤ $M + 1, (S + 1)^2$

해설

세 개의 변량 a, b, c 의 평균과 분산이 각각 M, S^2 이므로

$$M = \frac{a + b + c}{3}$$

$$S^2 = \frac{(a - M)^2 + (b - M)^2 + (c - M)^2}{3}$$

$a + 1, b + 1, c + 1$ 의 평균을 M_1 과 분산을 S_1^2 이라고 하면

$$M_1 = \frac{(a + 1) + (b + 1) + (c + 1)}{3}$$

$$= \frac{(a + b + c) + 3}{3} = \frac{a + b + c}{3} + 1 = M + 1$$

$$S_1^2 = \frac{1}{3} \{ (a + 1 - M - 1)^2 + (b + 1 - M - 1)^2 + (c + 1 - M - 1)^2 \}$$

$$= \frac{1}{3} \{ (a - M)^2 + (b - M)^2 + (c - M)^2 \} = S^2$$

따라서 $a + 1, b + 1, c + 1$ 의 평균과 분산은 각각 $M + 1, S^2$ 이다.

13. 자연수 a, b, c 에 대하여 가로 길이, 세로 길이, 높이가 각각 $\sqrt{a}, \sqrt{b}, \sqrt{c}$ 인 직육면체의 부피가 $6\sqrt{5}$ 일 때, 이 직육면체의 겉넓이의 최댓값을 구하여라. (단, $a \leq b \leq c$)

① $1 + 2\sqrt{5}$

② $2 + \sqrt{3}$

③ $2 + 12\sqrt{3}$

④ $2 + 21\sqrt{5}$

⑤ $2 + 24\sqrt{5}$

해설

부피는 $\sqrt{abc} = 6\sqrt{5} = \sqrt{180}$

$\therefore abc = 180 = 2^2 \times 3^2 \times 5$

한편 직육면체의 겉넓이는

$2(\sqrt{ab} + \sqrt{bc} + \sqrt{ca})$ 이고

$\sqrt{ab} + \sqrt{bc} + \sqrt{ca}$ 가 최댓값을 갖기 위한 자연수 a, b, c 의 순

서쌍은 $(1, 1, 180)$ 이므로

$\therefore (\text{직육면체의 겉넓이}) = 2(\sqrt{ab} + \sqrt{bc} + \sqrt{ca})$

$= 2(1 + \sqrt{180} + \sqrt{180})$

$= 2(1 + 6\sqrt{5} + 6\sqrt{5})$

$= 2(1 + 12\sqrt{5})$

$= 2 + 24\sqrt{5}$