

1. x 에 관한 이차방정식 $x^2 + 3ax - 2a = 0$ 의 한 근이 1 일 때, 다른 한 근은?(단, a 는 상수)

① -3

② -2

③ -1

④ 2

⑤ 3

해설

$x^2 + 3ax - 2a = 0$ 에 $x = 1$ 을 대입하면

$1 + 3a - 2a = 0, a = -1$

$x^2 - 3x + 2 = 0, (x - 2)(x - 1) = 0$

$\therefore x = 2$ 또는 $x = 1$

2. 이차방정식 $2x^2 + ax + 3a - 2 = 0$ 의 한 근이 -1 일 때, 다른 한 근을 구하면?

① 1 ② 2 ③ 3 ④ 4 ⑤ 0

해설

$2x^2 + ax + 3a - 2 = 0$ 에 $x = -1$ 을 대입하면

$2 - a + 3a - 2 = 0 \quad \therefore a = 0$

$a = 0$ 을 $2x^2 + ax + 3a - 2 = 0$ 에 대입하면

$2x^2 - 2 = 0, 2x^2 = 2 \quad \therefore x = \pm 1$

따라서 다른 한 근은 1이다.

3. 이차방정식 $x^2 - x - 6 = 0$ 의 두 근 중 작은 근이 이차방정식 $2x^2 + bx - 2 = 0$ 의 근이라고 할 때, b 의 값은?

① -3 ② -1 ③ 1 ④ 2 ⑤ 3

해설

$$x^2 - x - 6 = 0$$

$$(x - 3)(x + 2) = 0$$

$x = 3, -2$ 에서 작은 근은 $x = -2$ 이다.

$x = -2$ 를 $2x^2 + bx - 2 = 0$ 에 대입하면 $8 - 2b - 2 = 0$ 이다.

$$\therefore b = 3$$

4. 이차방정식 $3x^2 + ax + b = 0$ 의 근이 2 또는 3 일 때, $a + b$ 의 값을 구하면?

① -20 ② -15 ③ 0 ④ 3 ⑤ 6

해설

$$3(x-2)(x-3) = 0$$

$$3(x^2 - 5x + 6) = 0$$

$$3x^2 - 15x + 18 = 0$$

$$a = -15, b = 18$$

$$a + b = 3$$

5. 이차방정식 $x^2 + ax - 8 = 0$ 의 한 근이 2 일 때, 다른 한 근은?

① -5

② -4

③ -3

④ -2

⑤ -1

해설

$x^2 + ax - 8 = 0$ 에 $x = 2$ 를 대입하면

$\therefore a = 2$

$x^2 + 2x - 8 = (x + 4)(x - 2) = 0$

$\therefore x = 2$ 또는 $x = -4$

6. x 에 관한 이차방정식 $(a-1)x^2 - (a^2+1)x + 2(a+1) = 0$ 의 한 근이 3일 때, 두 근의 곱은? (a 는 정수)

① 2

② 3

③ 2, 3

④ -6

⑤ 6

해설

$x = 3$ 을 대입하면 $3a^2 - 11a + 10 = 0$

인수분해하면 $(3a - 5)(a - 2) = 0$

$a = 2$ ($\because a$ 는 정수)

$x^2 - 5x + 6 = 0$ 을 인수분해하면 $(x - 3)(x - 2) = 0$

$x = 3$ 또는 $x = 2$

따라서 두 근의 곱은 6이다.

7. 이차방정식 $ax^2 + (3 - 2a)x - 2 = 0$ 의 한 해가 $x = 3$ 일 때, 상수 a 의 값은?

- ① $\frac{3}{7}$ ② $\frac{7}{3}$ ③ $-\frac{7}{3}$ ④ $-\frac{7}{2}$ ⑤ $-\frac{3}{7}$

해설

이차방정식 $ax^2 + (3 - 2a)x - 2 = 0$ 에 $x = 3$ 을 대입하면,
 $a \times 3^2 + (3 - 2a) \times 3 - 2 = 0,$

$$9a + (9 - 6a) - 2 = 0, \quad 3a + 7 = 0$$

$$\therefore a = -\frac{7}{3}$$

8. 이차방정식 $ax^2 + (5-4b)x - 6 = 0$ 의 한 해가 $x = 1$ 일 때, 상수 $a-4b$ 의 값은?

① 15

② -8

③ 1

④ 8

⑤ 15

해설

이차방정식 $ax^2 + (5-4b)x - 6 = 0$ 에 $x = 1$ 을 대입하면,
 $a + 5 - 4b - 6 = 0$
 $\therefore a - 4b = 1$

9. x 에 대한 이차방정식 $(m-1)x^2 - (m^2+2m-2)x + 21 = 0$ 의 한 근이 3일 때, 두 근을 모두 양수가 되게 하는 m 의 값과 나머지 한 근의 합을 구하면?

- ① $\frac{13}{2}$ ② $\frac{15}{2}$ ③ $\frac{17}{2}$ ④ $\frac{19}{2}$ ⑤ $\frac{21}{2}$

해설

한 근이 3이므로 $x = 3$ 을 대입하면

$$9(m-1) - 3(m^2+2m-2) + 21 = 0$$

$$m^2 - m - 6 = 0, (m-3)(m+2) = 0$$

$$\therefore m = 3 \text{ 또는 } m = -2$$

i) $m = -2$ 이면 $-3x^2 + 2x + 21 = 0$

$$3x^2 - 2x - 21 = 0, (3x+7)(x-3) = 0$$

$$x = -\frac{7}{3} \text{ 또는 } x = 3 \text{ (한 근이 음수이므로 부적합)}$$

ii) $m = 3$ 이면 $2x^2 - 13x + 21 = 0$

$$(x-3)(2x-7) = 0$$

$$x = 3 \text{ 또는 } x = \frac{7}{2} \text{ (두 근이 모두 양수이므로 적합)}$$

$$\text{따라서 } m = 3, \text{ 나머지 한 근은 } x = \frac{7}{2}$$

$$\therefore m + x = 3 + \frac{7}{2} = \frac{13}{2}$$

10. x 에 대한 이차방정식 $(m+1)x^2 + (m^2+3m-4)x - 8 = 0$ 의 한 근이 2일 때, 두 근을 모두 양수가 되게 하는 m 의 값과 나머지 한 근의 곱이 $-\frac{a}{b}$ 이다. $a+b$ 의 값을 구하여라. (단, a, b 는 서로소인 자연수이다.)

▶ 답 :

▷ 정답 : $a+b=29$

해설

한 근이 2이므로 $x=2$ 를 대입하면
 $4(m+1) + 2(m^2+3m-4) - 8 = 0$
 $2m^2 + 10m - 12 = 0$
 $m^2 + 5m - 6 = 0$
 $(m+6)(m-1) = 0$
 $m = -6$ 또는 $m = 1$
i) $m = 1$ 일 때,
 $2x^2 - 8 = 0$
 $x^2 = 4$
 $x = 2$ 또는 $x = -2$ ($-2 < 0$ 이므로 부적합)
ii) $m = -6$ 일 때,
 $-5x^2 + 14x - 8 = 0$
 $5x^2 - 14x + 8 = 0$
 $(x-2)(5x-4) = 0$
 $x = 2$ 또는 $x = \frac{4}{5}$ (두 근이 모두 양수이므로 적합)
따라서 $m = -6$ 이고, 다른 한 근은 $\frac{4}{5}$ 이므로 $-6 \times \frac{5}{4} = -\frac{24}{5}$
 $\therefore a = 24, b = 5$
 $\therefore a + b = 15 + 2 = 29$

11. 이차방정식 $5x^2 - ax + b = 0$ 의 두 근의 합이 1 이고, 큰 근이 작은 근보다 5 가 클 때, $a + b$ 의 값을 구하여라.

▶ 답 :

▷ 정답 : -25

해설

두 근을 $e, f (e > f)$ 라 하면 $e = f + 5$ 이고, $e + f = 1$ 이므로
연립하면 $e = 3, f = -2$ 이다.

따라서 두 근은 3, -2 이다.

3, -2 를 두 근으로 $5x^2 - ax + b = 0$ 에 대입하여 연립하면
 $a = 5, b = -30$ 가 나온다.

따라서 $a + b = 5 + (-30) = -25$ 이다.

12. 임의의 실수 x 의 정수 부분이 a 일 때, $[x] = a$ 로 나타내기로 한다.
 $2 \leq x < 3$ 일 때, 방정식 $[x]x^2 - x - 5[x] = 0$ 의 해는?

- ① $\frac{5}{2}$ ② $\frac{7}{3}$ ③ $\frac{3}{2}$ ④ -2 ⑤ $-\frac{5}{2}$

해설

$2 \leq x < 3$ 이므로 $[x] = 2$ 이다.

$[x] = 2$ 를 대입하면 $2x^2 - x - 10 = 0$ 이고, 인수분해를 하면
 $(2x - 5)(x + 2) = 0$ 이다.

$\therefore x = \frac{5}{2}$ ($\because 2 \leq x < 3$)

13. $x^2 - 3x + 1 = 0$ 일 때, $x^2 + x + \frac{1}{x} + \frac{1}{x^2}$ 의 값을 구하여라.

▶ 답 :

▷ 정답 : 10

해설

$x^2 - 3x + 1 = 0$ 의 양변을 x 로 나누면

$$x - 3 + \frac{1}{x} = 0 \quad \therefore x + \frac{1}{x} = 3$$

$$\begin{aligned} x^2 + x + \frac{1}{x} + \frac{1}{x^2} &= \left(x + \frac{1}{x}\right)^2 - 2 + \left(x + \frac{1}{x}\right) \\ &= 9 - 2 + 3 = 10 \end{aligned}$$

14. $x^2 - 5x + 1 = 0$ 일 때, $x^2 + x + \frac{1}{x} + \frac{1}{x^2}$ 의 값을 구하여라.

▶ 답 :

▷ 정답 : 28

해설

$x^2 - 5x + 1 = 0$ 의 양변을 x 로 나누면

$$x - 5 + \frac{1}{x} = 0 \quad \therefore x + \frac{1}{x} = 5$$

$$\begin{aligned} x^2 + x + \frac{1}{x} + \frac{1}{x^2} &= \left(x + \frac{1}{x}\right)^2 - 2 + \left(x + \frac{1}{x}\right) \\ &= 25 - 2 + 5 = 28 \end{aligned}$$

15. $f(x) = \frac{1}{\sqrt{x+1} + \sqrt{x}}$ 이고, $k = f(49) + f(50) + f(51) + \cdots + f(79) + f(80)$ 이다.
 k 가 x 에 관한 이차방정식 $(a+5)x^2 + (a^2-2)x + 4(a-2) = 0$ 의 한 근일 때, 다른 한 근을 구하여라.

▶ 답 :

▷ 정답 : $-\frac{8}{3}$

해설

$$\begin{aligned} f(x) &= \frac{1}{\sqrt{x+1} + \sqrt{x}} = \frac{\sqrt{x+1} - \sqrt{x}}{x+1-x} \\ &= \sqrt{x+1} - \sqrt{x} \\ k &= f(49) + f(50) + f(51) + \cdots + f(79) + f(80) \\ &= \sqrt{50} - \sqrt{49} + \sqrt{51} - \sqrt{50} \\ &\quad + \cdots + \sqrt{81} - \sqrt{80} \\ &= -\sqrt{49} + \sqrt{81} \\ &= -7 + 9 = 2 \\ (a+5)x^2 + (a^2-2)x + 4(a-2) &= 0 \text{ 에 } x=2 \text{ 를 대입하면} \\ 4a + 20 + 2a^2 - 4 + 4a - 8 &= 0 \\ 2a^2 + 8a + 8 &= 0, \quad a^2 + 4a + 4 = 0 \\ (a+2)^2 &= 0 \quad \therefore a = -2 \\ a = -2 \text{ 를 식에 대입하면} \\ 3x^2 + 2x - 16 &= 0, \quad (x-2)(3x+8) = 0 \\ \therefore x &= 2 \text{ 또는 } x = -\frac{8}{3} \end{aligned}$$

16. $f(x) = \frac{1}{\sqrt{x+1} + \sqrt{x}}$ 이고, $k = f(1) + f(2) + \cdots + f(23) + f(24)$

이다.

k 가 x 에 관한 이차방정식 $(a+1)x^2 + (a^2-2)x + 8 = 0$ 의 한 근일 때, 다른 한 근을 구하여라.

▶ 답 :

▷ 정답 : -2

해설

$$f(x) = \frac{1}{\sqrt{x+1} + \sqrt{x}} = \frac{\sqrt{x+1} - \sqrt{x}}{x+1-x} = \frac{\sqrt{x+1} - \sqrt{x}}{1}$$

$$\begin{aligned} k &= f(1) + f(2) + f(3) + \cdots + f(23) + f(24) \\ &= \sqrt{2} - \sqrt{1} + \sqrt{3} - \sqrt{2} + \cdots + \sqrt{25} - \sqrt{24} \\ &= -\sqrt{1} + \sqrt{25} \\ &= -1 + 5 = 4 \end{aligned}$$

$(a+1)x^2 + (a^2-2)x + 8 = 0$ 에 $x=4$ 를 대입

$$16a + 16 + 4a^2 - 8 + 8 = 0$$

$$4a^2 + 16a + 16 = 0, \quad a^2 + 4a + 4 = 0$$

$$(a+2)^2 = 0 \quad \therefore a = -2$$

$a = -2$ 를 식에 대입하면

$$-x^2 + 2x + 8 = 0, \quad -(x+2)(x-4) = 0$$

$$\therefore x = -2 \text{ 또는 } x = 4$$

17. 이차방정식 $x^2 + ax + 2 = 0$ 의 한 근 p 가 $1 - \frac{2}{p^2} + \frac{a}{p} + \frac{2}{p} = 0$ 을 만족할 때, ap 의 값을 구하여라.

▶ 답 :

▷ 정답 : -6

해설

$x = p$ 를 주어진 방정식에 대입하면

$$p^2 + ap + 2 = 0, p^2 + ap = -2 \cdots \textcircled{A}$$

$1 - \frac{2}{p^2} + \frac{a}{p} + \frac{2}{p} = 0$ 의 양변에 p^2 을 곱하면

$$p^2 - 2 + ap + 2p = 0, p^2 + ap = 2 - 2p \cdots \textcircled{B}$$

$$\textcircled{A}, \textcircled{B} \text{에서 } -2 = 2 - 2p \quad \therefore p = 2$$

$p = 2$ 를 $\textcircled{A}$ 에 대입하면

$$\therefore a = -3$$

$$\therefore ap = (-3) \times 2 = -6$$

18. 이차방정식 $x^2 - px + 1 = 0$ 의 한 근을 a , $x^2 + qx - 3 = 0$ 의 한 근을 b 라 하고, $pa - qb = 2$ 를 만족할 때, $a^2 + b^2$ 의 값을 구하여라.

▶ 답 :

▷ 정답 : 4

해설

$x^2 - px + 1 = 0$ 에 $x = a$ 를 대입하면

$$a^2 - pa + 1 = 0, a^2 - pa = -1 \cdots \textcircled{1}$$

$x^2 + qx - 3 = 0$ 에 $x = b$ 를 대입하면

$$b^2 + qb - 3 = 0, b^2 + qb = 3 \cdots \textcircled{2}$$

$\textcircled{1} + \textcircled{2}$ 을 하면

$$a^2 - pa + b^2 + qb = 2 \text{ 이고 } pa - qb = 2 \text{ 이므로}$$

$$a^2 + b^2 - (pa - qb) = 2$$

$$a^2 + b^2 - 2 = 2$$

$$\therefore a^2 + b^2 = 4$$

19. $x > 0$ 일 때, 이차방정식 $\frac{4}{x^2} + \frac{1}{x} - 14 = 0$ 의 해를 구하여라.

▶ 답 :

▷ 정답 : $\frac{4}{7}$

해설

$\frac{4}{x^2} + \frac{1}{x} - 14 = 0$ 에서 $\frac{1}{x} = A$ 라 하면

$$4A^2 + A - 14 = 0$$

$$(A + 2)(4A - 7) = 0$$

$$A = \frac{7}{4} \left(\because \frac{1}{x} > 0 \right)$$

$$\therefore x = \frac{4}{7}$$

20. x 에 대한 이차방정식 $(a+2)x^2 - a^2x + 4 = 0$ 의 한 근이 1일 때, a 의 값과 나머지 한 근을 구하여라.

▶ 답 :

▶ 답 :

▷ 정답 : $a = 3$

▷ 정답 : $x = \frac{4}{5}$

해설

$$(a+2)x^2 - a^2x + 4 = 0 \text{에}$$

$x = 1$ 을 대입하면

$$a+2-a^2+4=0$$

$$a^2-a-6=0$$

$$(a+2)(a-3)=0$$

이차방정식 $(a+2)x^2 - a^2x + 4 = 0$ 은

x^2 의 계수는 0이 아니어야 하므로

$$\therefore a = 3$$

$a = 3$ 을 이차방정식에 대입하면

$$5x^2 - 9x + 4 = 0$$

$$(x-1)(5x-4) = 0$$

$$x = 1 \text{ 또는 } x = \frac{4}{5}$$

따라서 $a = 3$ 이고 나머지 한 근은 $\frac{4}{5}$ 이다.