

1. 집합  $A = \{x \mid 0 \leq x \leq 2\}$ 에 대하여

함수  $f: A \rightarrow A$ 를  $f(x) = \begin{cases} x+1 & (0 \leq x \leq 1) \\ x-1 & (1 < x \leq 2) \end{cases}$ 와 같이 정의한다.

이때,  $f\left(\frac{1}{3}\right) + f^2\left(\frac{1}{3}\right) + \cdots + f^{30}\left(\frac{1}{3}\right)$ 의 값은? (단,  $f^2 = f \circ f$ ,  $f^3 = f \circ f \circ f$ , ...)

① 20

② 25

③ 30

④ 35

⑤ 40

해설

$$f\left(\frac{1}{3}\right) = \frac{1}{3} + 1 = \frac{4}{3}$$

$$f^2\left(\frac{1}{3}\right) = f\left(f\left(\frac{1}{3}\right)\right) = f\left(\frac{4}{3}\right) = \frac{4}{3} - 1 = \frac{1}{3}$$

$$f^3\left(\frac{1}{3}\right) = f\left(f^2\left(\frac{1}{3}\right)\right) = f\left(\frac{1}{3}\right) = \frac{1}{3} + 1 = \frac{4}{3}$$

$\vdots$

$$\therefore f\left(\frac{1}{3}\right) + f^2\left(\frac{1}{3}\right) + \cdots + f^{30}\left(\frac{1}{3}\right)$$

$$= \left\{ f\left(\frac{1}{3}\right) + f^3\left(\frac{1}{3}\right) + \cdots + f^{29}\left(\frac{1}{3}\right) \right\}$$

$$+ \left\{ f^2\left(\frac{1}{3}\right) + f^4\left(\frac{1}{3}\right) + \cdots + f^{30}\left(\frac{1}{3}\right) \right\}$$

$$= 15 \cdot \frac{4}{3} + 15 \cdot \frac{1}{3} = 25$$

2. 임의의 자연수에 대하여 함수  $f$  가 다음 두 조건을 만족할 때,  
 $f(1) + f(2) + f(3) + \cdots + f(2008)$  의 값은?

(가)  $f(1) = 1, f(2) = 2$   
(나)  $f(x+1) = f(x+2) + f(x)$

- ① 1      ② 3      ③ 4      ④ 2007      ⑤ 2008

해설

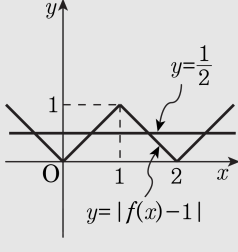
(나) 에서  $f(x+2) = f(x+1) - f(x)$  이므로  
 $f(3) = f(2) - f(1) = 2 - 1 = 1$   
 $f(4) = f(3) - f(2) = 1 - 2 = -1$   
 $f(5) = f(4) - f(3) = -1 - 1 = -2$   
 $f(6) = f(5) - f(4) = -2 - (-1) = -1$   
 $f(7) = f(6) - f(5) = -1 - (-2) = 1$   
 $f(8) = f(7) - f(6) = 1 - (-1) = 2$   
:  
따라서  $f(1) = f(7), f(2) = f(8), f(3) = f(9), \dots,$   
 $f(x) = f(x+6)$  이고  
 $f(1) + f(2) + f(3) + f(4) + f(5) + f(6) = 0$  이므로  
 $f(1) + f(2) + f(3) + \cdots + f(2008)$   
 $= 334 \{ f(1) + f(2) + \cdots + f(5) + f(6) \}$   
 $\quad + f(2005) + f(2006) + f(2007) + f(2008)$   
 $= 334 \cdot 0 + 1 + 2 + 1 + (-1) = 3$

3. 함수  $f(x) = |x - 1|$  에 대하여  $(f \circ f)(x) = \frac{1}{2}$  의 실근의 개수를 구하면?

- ① 0개      ② 1개      ③ 2개      ④ 3개      ⑤ 4개

해설

$(f \circ f)(x) = |f(x) - 1|$  이므로  
 $y = |f(x) - 1|$  의 그래프는 다음 그림과 같다.



따라서 함수  $y = |f(x) - 1|$  의 그래프와  
직선  $y = \frac{1}{2}$  이 4 개의 점에서  
만나므로 주어진 방정식의 실근의 개수는 4 개이다.

4. 함수  $f(x) = 2x + 1$  의 역함수를  $g(x)$  라 할 때, 함수  $f(3x)$  의 역함수를  $g(x)$  를 이용하여 나타낸 것은?

①  $\frac{1}{2}g(x) - \frac{1}{2}$

②  $\frac{1}{6}g(x) - \frac{1}{6}$

③  $2g(x) - 1$

④  $\frac{1}{3}g(x)$

⑤  $\frac{1}{2}g(x)$

해설

$f(x) = 2x + 1$  에서  $y = 2x + 1$  이라 놓고

$x$  에 대하여 정리하면  $x = \frac{y-1}{2}$

$x$  와  $y$  를 바꾸어 쓰면  $y = \frac{x-1}{2}$

$$\therefore f^{-1}(x) = g(x) = \frac{x-1}{2}$$

$f(3x) = 6x + 1$  에서  $y = 6x + 1$  이라 놓고

$x$  에 대하여 정리하면  $x = \frac{y-1}{6}$

$x$  와  $y$  를 바꾸어 쓰면  $y = \frac{x-1}{6}$

$$\therefore f^{-1}(3x) = g(3x) = \frac{x-1}{6}$$

$$\therefore g(3x) = \frac{1}{3} \times \frac{x-1}{2} = \frac{1}{3} \cdot g(x)$$

5. 두 함수  $f(x) = -x + 5$ ,  $g(x) = 4x - 1$  에 대하여  $(f \circ h \circ g)(x) = 2x - \frac{3}{2}$  를 만족하는 함수  $h(x)$  를 구하면?

- ①  $h(x) = -\frac{1}{2}x + 6$                       ②  $h(x) = -\frac{1}{2}x + 3$   
③  $h(x) = -\frac{1}{2}x + 2$                       ④  $h(x) = \frac{1}{2}x + 5$   
⑤  $h(x) = \frac{1}{2}x + 8$

**해설**

$f(x) = -x + 5$  에서  $f^{-1}(x) = -x + 5$  이므로

$(f \circ h \circ g)(x) = 2x - \frac{3}{2}$  에서

$f(h(g(x))) = 2x - \frac{3}{2}$  이므로

$$\begin{aligned} h(g(x)) &= f^{-1}\left(2x - \frac{3}{2}\right) \\ &= -\left(2x - \frac{3}{2}\right) + 5 \\ &= -2x + \frac{13}{2} \end{aligned}$$

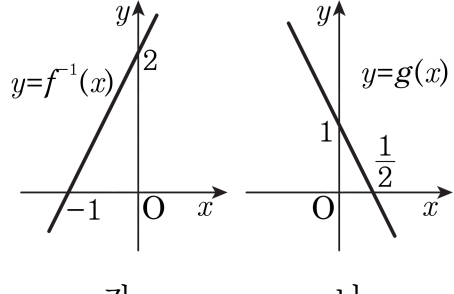
$$\therefore h(4x - 1) = -2x + \frac{13}{2} \cdots \textcircled{1}$$

①에서  $4x - 1 = t$  라 하면  $x = \frac{t+1}{4}$  이므로

$$h(t) = -2\left(\frac{t+1}{4}\right) + \frac{13}{2} = -\frac{1}{2}t + 6 \text{ 이다.}$$

$$\text{따라서 } h(x) = -\frac{1}{2}x + 6$$

6. 다음의 그림 (가)는 함수  $f$ 의 역함수  $f^{-1}$ 의 그래프이고, 그림 (나)는 함수  $g$ 의 그래프이다.



가

나

다음 중 함수  $g$ 의 역함수  $g^{-1}$ 을 함수  $f$ 를 이용하여 나타내면?

- ☒ ①  $y = -f(x + 1)$       ②  $y = f(x - 1)$       ③  $y = -f(x - 1)$   
 ④  $y = f(x + 1)$       ⑤  $y = -f(1 - x)$

해설

그림 (가)의 그래프를  $y$ 축에 대칭이동한 후  
 $y$ 축의 방향으로  $-1$ 만큼 평행이동하면  
 그림 (나)의 그래프와 일치한다.  
 즉,  $y = f^{-1}(x)$ 를  $y$ 축에 대칭이동하면  
 $y = f^{-1}(-x) \cdots \textcircled{㉠}$ 이다.  
 $\textcircled{㉠}$ 을  $y$ 축의 방향으로  $-1$ 만큼 평행이동하면  
 $y = f^{-1}(-x) - 1 \cdots \textcircled{㉡}$ 이다.  
 $\textcircled{㉡}$ 의 역함수는  $x = f^{-1}(-y) - 1 \cdots \textcircled{㉢}$ 이므로  
 $\textcircled{㉢}$ 에서  $f^{-1}(-y) = x + 1$ 이다.  
 $\therefore y = -f(x + 1)$   
 $\therefore g^{-1}(x) = -f(x + 1)$

7. 함수  $y = [x] - x$  와  $y = \frac{1}{3}x$  의 그래프가 만나는 점은  $a$  개이고, 이 점들의  $x$  좌표의 합은  $b$  이다. 이 때,  $a + b$  의 값은? (단,  $[x]$  는  $x$  를 넘지 않는 최대 정수이다.)

- ①  $-\frac{5}{2}$       ②  $-\frac{3}{2}$       ③  $-\frac{1}{2}$       ④  $\frac{1}{2}$       ⑤  $\frac{3}{2}$

해설

$-3 \leq x < -2$  일 때,  $[x] = -3$  이므로

$$y = [x] - x = -3 - x$$

$-2 \leq x < -1$  일 때,  $[x] = -2$  이므로

$$y = [x] - x = -2 - x$$

$-1 \leq x < 0$  일 때,  $[x] = -1$  이므로

$$y = [x] - x = -1 - x$$

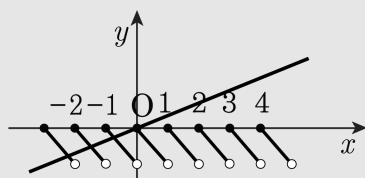
$0 \leq x < 1$  일 때,  $[x] = 0$  이므로

$$y = [x] - x = -x$$

$1 \leq 2x < 2$  일 때,  $[x] = 1$  이므로

$$y = [x] - x = 1 - x$$

따라서  $y = [x] - x$  와  $y = \frac{1}{3}x$  의 그래프는 다음과 같다.



그러므로 두 그래프가 만나는 점은 4개이고

만나는 점의  $x$  좌표는 다음과 같다.

$$\text{i) } -3 \leq x < -2 \text{ 일 때, } -3 - x = \frac{1}{3}x \quad \therefore x = -\frac{9}{4}$$

$$\text{ii) } -2 \leq x < -1 \text{ 일 때, } -2 - x = \frac{1}{3}x \quad \therefore x = -\frac{3}{2}$$

$$\text{iii) } -1 \leq x < 0 \text{ 일 때, } -1 - x = \frac{1}{3}x \quad \therefore x = -\frac{3}{4}$$

$$\text{iv) } 0 \leq x < 1 \text{ 일 때, } -x = \frac{1}{3}x \quad \therefore x = 0$$

$$\therefore a = 4, b = \left(-\frac{9}{4}\right) + \left(-\frac{3}{2}\right) + \left(-\frac{3}{4}\right) = -\frac{9}{2}$$

$$\therefore a + b = 4 + \left(-\frac{9}{2}\right) = -\frac{1}{2}$$

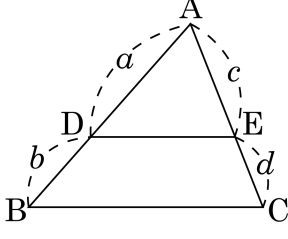
8.  $a, b, c$ 가 서로 다른 수이고,  $\langle a, b, c \rangle = \frac{a-c}{b-c}$  라고 정의한다.  $\langle a, b, c \rangle = x$ 라 할 때,  $\langle b, c, a \rangle$ 를  $x$ 에 관한 식으로 나타내어 그것을  $f(x)$ 라 하자. 이때,  $x$ 에 관한 식  $f(x)$ 에 대하여  $f(2) \times f(3) \times \cdots \times f(10)$ 의 값을 구하면?

- ①  $\frac{1}{2}$       ②  $\frac{1}{4}$       ③  $\frac{1}{6}$       ④  $\frac{1}{8}$       ⑤  $\frac{1}{10}$

해설

$$\begin{aligned}
 & \text{(i) } \langle a, b, c \rangle = \frac{a-c}{b-c} = x \\
 & \therefore a = c + (b-c)x \\
 & \text{(ii) } \langle b, c, a \rangle = \frac{b-a}{c-a} = \frac{b - \{c + (b-c)x\}}{c - \{c + (b-c)x\}} \\
 & \quad = \frac{(b-c)(1-x)}{-(b-c)x} = \frac{x-1}{x} \\
 & \therefore f(x) = \frac{x-1}{x} \\
 & \therefore f(2) \times f(3) \times \cdots \times f(9) \times f(10) \\
 & = \frac{1}{2} \times \frac{2}{3} \times \frac{3}{4} \times \cdots \times \frac{8}{9} \times \frac{9}{10} \\
 & = \frac{1}{10}
 \end{aligned}$$

9. 다음 그림과 같이  $\overline{DE} \parallel \overline{BC}$ 인 삼각형 ABC가 있다.  $\overline{AD} = a$ ,  $\overline{DB} = b$ ,  $\overline{AE} = c$ ,  $\overline{EC} = d$ 일 때, 다음 중  $a$ ,  $b$ ,  $c$ ,  $d$ 사이의 관계로 옳지 않은 것은? (단,  $a \neq b$ )



①  $ad = bc$

③  $\frac{a-b}{b} = \frac{c-d}{d}$

⑤  $\frac{c+d}{a+b} = \frac{c-d}{a-b}$

②  $\frac{a+b}{b} = \frac{c+d}{d}$

④  $\frac{c+d}{a+b} = \frac{d}{a}$

해설

$\overline{DE} \parallel \overline{BC}$ 이므로

$$a : b = c : d \Leftrightarrow \frac{a}{b} = \frac{c}{d} \dots \textcircled{1}$$

①  $\frac{a}{b} = \frac{c}{d}$ 이므로  $ad = bc$

②  $\frac{a}{b} = \frac{c}{d}$ 이므로  $\frac{a}{b} + 1 = \frac{c}{d} + 1$

$$\therefore \frac{a+b}{b} = \frac{c+d}{d} \dots \textcircled{2}$$

③  $\frac{a}{b} = \frac{c}{d}$ 이므로  $\frac{a}{b} - 1 = \frac{c}{d} - 1$

$$\therefore \frac{a-b}{b} = \frac{c-d}{d} \dots \textcircled{3}$$

④  $\textcircled{1} \div \textcircled{2}$ 에서  $\frac{a}{a+b} = \frac{c}{c+d}$

$$\therefore \frac{c+d}{a+b} = \frac{c}{a}$$

⑤  $\textcircled{3} \div \textcircled{2}$ 에서  $\frac{a-b}{a+b} = \frac{c-d}{c+d}$

$$\therefore \frac{c+d}{a+b} = \frac{c-d}{a-b}$$

10. 어느 도시의 택시 요금은 주황 거리 2km 미만에서는 1000 원이고, 2km가 되는 순간에 1200 원이 되고 그 후부터는 매 500 m 증가할 때마다 200 원씩 요금이 추가된다고 한다. 택시를 타고 간 거리가  $x$  km(단,  $x > 2$ ) 일 때의 택시 요금을 나타내는 식은? (단,  $|x|$ 는  $x$ 를 넘지 않는 최대의 정수를 나타낸다.)
- ①  $1000 + 200|x|$                       ②  $1000 + 200(|x| - 1)$
- ③  $1000 + 200(|x| - 1)$                       ④  $1000 + 200(|x| - 2)$
- ⑤  $1000 + 200(2|x| - 3)$

## 해설

거리  $x$ 가  $2 < x < 2.5$  일 때  
 $4 < 2x < 5$  이므로  $|2x| = 4$  이고  
 요금은  $1000 + 200 \times 1 = 1000 + 200(|2x| - 3)$  원이다.  
 $2.5 \leq x < 3$  일 때  
 $5 \leq 2x < 6$  이므로  $|2x| = 5$  이고  
 요금은  $1000 + 200 \times 2 = 1000 + 200(|2x| - 3)$  원이다.  
 $3 \leq x < 3.5$  일 때  
 $6 \leq 2x < 7$  이므로  $|2x| = 6$  이고  
 요금은  $1000 + 200 \times 3 = 1000 + 200(|2x| - 3)$  원이다.  
 따라서  $x$  km를 타고 갔을 때, 요금은  
 $1000 + 200(|2x| - 3)$  원이라고 추정할 수 있다.

11.  $a$ 가 실수일 때,  $f(a) = \sqrt{(a + \sqrt{a^2})^2} - \sqrt{(a - \sqrt{a^2})^2}$ 을 간단히 하면?

- ①  $a$       ②  $2a$       ③  $-a$       ④  $-2a$       ⑤  $0$

해설

$\sqrt{a^2} = |a|$ 이므로  $f(a) = |a + |a|| - |a - |a||$   
 $a \geq 0$ 인 경우와  $a < 0$ 인 경우로 나누어 생각하면  
( i )  $a \geq 0$ 일 때,  
 $f(a) = |a + a| - |a - a| = |2a| = 2a$   
( ii )  $a < 0$ 일 때,  
 $f(a) = |a - a| - |a - (-a)| = -|2a| = 2a$   
따라서 모든 실수  $a$ 에 대하여  $f(a) = 2a$

12.  $\sqrt{17 + \sqrt{288}}$ 의 소수 부분을  $x$ 라 할 때,

$\sqrt{\frac{x+2+\sqrt{4x+x^2}}{x+2-\sqrt{4x+x^2}}}$ 의 값을 구하면?

- ①  $\sqrt{2} + 1$
- ②  $\sqrt{3} + 1$
- ③  $\sqrt{2} - 1$
- ④  $\sqrt{3} - 1$
- ⑤  $\sqrt{5} - 2$

해설

$$\begin{aligned} & \sqrt{17 + \sqrt{288}} \\ &= \sqrt{17 + 2\sqrt{72}} \\ &= \sqrt{9} + \sqrt{8} \quad (\leftarrow 17 = 9 + 8, \quad 72 = 9 \times 8) \\ &= 3 + 2\sqrt{2} \quad (\leftarrow \sqrt{2} = 1.4 \times \times) \\ &= 5.8 \times \times \text{이므로 소수부분은 } 3 + 2\sqrt{2} - 5 \text{이다.} \\ \therefore x &= 2\sqrt{2} - 2 \quad \therefore x + 2 = 2\sqrt{2} \\ \text{또, } x^2 + 4x + 4 &= (x + 2)^2 \text{이므로} \\ x^2 + 4x &= (x + 2)^2 - 4 = (2\sqrt{2})^2 - 4 = 4 \\ \text{따라서 준식에 } x + 2 &= 2\sqrt{2} \\ x^2 + 4x = 4 &\text{를 대입시키면} \\ \sqrt{\frac{x+2+\sqrt{4x+x^2}}{x+2-\sqrt{4x+x^2}}} & \\ &= \sqrt{\frac{2\sqrt{2}+2}{2\sqrt{2}-2}} \\ &= \sqrt{\frac{\sqrt{2}+1}{\sqrt{2}-1}} = \sqrt{\frac{(\sqrt{2}+1)(\sqrt{2}+1)}{(\sqrt{2}-1)(\sqrt{2}+1)}} \\ &= \sqrt{(\sqrt{2}+1)^2} = \sqrt{2} + 1 \end{aligned}$$

13.  $a, b$ 는 실수이고  $a^3 = 26 + 15\sqrt{3}$ ,  $b^3 = 26 - 15\sqrt{3}$ 일 때,  $\frac{\sqrt{a} + \sqrt{b}}{\sqrt{a} - \sqrt{b}}$ 의 값은 ?

- ①  $-2\sqrt{3}$
- ②  $-\sqrt{3}$
- ③  $2\sqrt{3}$
- ④  $\sqrt{3}$
- ⑤  $1$

해설

$$\begin{aligned} a^3 + b^3 &= (a+b)^3 - 3ab(a+b) \\ &= 26 + 15\sqrt{3} + 26 - 15\sqrt{3} = 52 \cdots \textcircled{1} \end{aligned}$$

$$(ab)^3 = a^3b^3 = (26 + 15\sqrt{3})(26 - 15\sqrt{3}) = 1$$

$\therefore ab = 1, \quad a + b = t$ 로 놓으면

$$\textcircled{1} \text{에서 } t^3 - 3t - 52 = 0, \quad (t-4)(t^2 + 4t + 13) = 0$$

$a, b$ 가 실수이므로  $t$ 도 실수이다.

$$\therefore t = 4, \text{ 즉 } a + b = 4$$

$$\begin{aligned} (\text{준식}) &= \frac{(\sqrt{a} + \sqrt{b})^2}{(\sqrt{a} - \sqrt{b})(\sqrt{a} + \sqrt{b})} \\ &= \frac{a + b + 2\sqrt{ab}}{a - b} \end{aligned}$$

$a + b = 4, \quad ab = 1$ 이므로

$a, b$ 는  $x^2 - 4x + 1 = 0$ 의 근이고

$a^3 > b^3$ 이므로  $a > b$

$$\therefore a = 2 + \sqrt{3}, \quad b = 2 - \sqrt{3}$$

$$\therefore a - b = 2\sqrt{3}$$

$$\therefore (\text{준식}) = \frac{4 + 2}{2\sqrt{3}} = \sqrt{3}$$

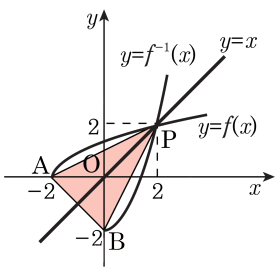
14. 임의의 자연수  $n$ 에 대하여  $(1 + \sqrt{3})^n = a_n + b_n \sqrt{3}$  ( $a_n, b_n$ 은 유리수)로 나타낼 때,  $a_5^2 - 3b_5^2$ 의 값은?

①  $-2^5$       ②  $-3^2$       ③ 0      ④ 1      ⑤  $2^5$

해설

$$\begin{aligned}(1 + \sqrt{3})^n &= a_n + b_n \sqrt{3} \text{이라 하면} \\ (1 - \sqrt{3})^n &= a_n - b_n \sqrt{3} \text{의 꼴로 나타낼 수 있다.} \\ \therefore a_5^2 - 3b_5^2 &= (a_5 - b_5 \sqrt{3})(a_5 + b_5 \sqrt{3}) \\ &= (1 - \sqrt{3})^5 (1 + \sqrt{3})^5 \\ &= (-2)^5 = -2^5\end{aligned}$$

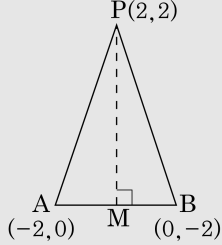
15. 무리함수  $f(x) = \sqrt{x+2}$ 에 대하여  $y = f(x)$ 의 그래프와  $x$ 축이 만나는 점을 A,  $y = f^{-1}(x)$ 의 그래프와  $y$ 축이 만나는 점을 B라 하자.  $y = f(x)$ 와  $y = f^{-1}(x)$ 의 그래프가 만나는 교점을 P라고 할 때, 삼각형 ABP의 넓이를 구하면?



- ① 5      ② 6      ③  $4\sqrt{2}$   
 ④ 8      ⑤ 10

해설

$y = f(x) = \sqrt{x+2}$ 의 정의역은  $\{x \mid x \geq -2\}$ , 치역은  $\{y \mid y \geq 0\}$   
 $x$ 와  $y$ 를 서로 바꾸면  $x = \sqrt{y+2}$   
 $y$ 에 관하여 정리하면  $y = x^2 - 2$   
 따라서  $y = f^{-1}(x) = x^2 - 2$ 이고,  
 정의역은  $\{x \mid x \geq 0\}$ , 치역은  $\{y \mid y \geq -2\}$   
 이때,  $y = f(x)$ 와  
 $y = f^{-1}(x)$ 의 교점은  
 $y = f(x)$ 와  $y = x$ 의  
 교점과 같다.



$\sqrt{x+2} = x, x+2 = x^2$   
 $x^2 - x - 2 = 0,$   
 $x = 2$  또는  $x = -1$   
 $\therefore x = 2, y = 2(\because x > 0)$   
 $\therefore P(2, 2)$   
 $\overline{AB}$ 의 중점을 M이라 하면  $M(-1, -1)$   
 $\triangle ABP$ 는  $\overline{AP} = \overline{BP}$ 인 이등변삼각형이므로  
 $\overline{AB} \perp \overline{PM}$ 이다.  
 $\overline{AB} = \sqrt{2^2 + 2^2} = 2\sqrt{2}$   
 $\overline{PM} = \sqrt{3^2 + 3^2} = 3\sqrt{2}$   
 따라서  $\triangle ABP$ 의 넓이를 S라 하면  
 $S = \frac{1}{2} \times \overline{AB} \times \overline{PM} = \frac{1}{2} \times 2\sqrt{2} \times 3\sqrt{2} = 6$