1. 집합 $A = \{x \mid 0 \le x \le 2\}$에 대하여

함수 $f : A \to A$를 $f(x) = \begin{cases} x+1 & (0 \le x \le 1) \\ x-1 & (1 < x \le 2) \end{cases}$와 같이 정의한다.

이때, $f\left(\frac{1}{3}\right)+f^2\left(\frac{1}{3}\right)+\cdots+f^{30}\left(\frac{1}{3}\right)$의 값은? (단, $f^2 = f \circ f$, $f^3 = f \circ f \circ f$, $\cdots$)

① 20　　② 25　　③ 30　　④ 35　　⑤ 40

해설

$$f\left(\frac{1}{3}\right) = \frac{1}{3}+1 = \frac{4}{3}$$

$$f^2\left(\frac{1}{3}\right) = f\left(f\left(\frac{1}{3}\right)\right) = f\left(\frac{4}{3}\right) = \frac{4}{3}-1 = \frac{1}{3}$$

$$f^3\left(\frac{1}{3}\right) = f\left(f^2\left(\frac{1}{3}\right)\right) = f\left(\frac{1}{3}\right) = \frac{1}{3}+1 = \frac{4}{3}$$

$$\vdots$$

$$\therefore f\left(\frac{1}{3}\right)+f^2\left(\frac{1}{3}\right)+\cdots+f^{30}\left(\frac{1}{3}\right)$$

$$= \left\{f\left(\frac{1}{3}\right)+f^3\left(\frac{1}{3}\right)+\cdots+f^{29}\left(\frac{1}{3}\right)\right\}$$

$$+\left\{f^2\left(\frac{1}{3}\right)+f^4\left(\frac{1}{3}\right)+\cdots+f^{30}\left(\frac{1}{3}\right)\right\}$$

$$= 15\cdot\frac{4}{3}+15\cdot\frac{1}{3} = 25$$

2. 임의의 자연수에 대하여 함수 f 가 다음 두 조건을 만족할 때, $f(1)+f(2)+f(3)+\cdots+f(2008)$ 의 값은?

(가) $f(1)=1,\ f(2)=2$ (나) $f(x+1)=f(x+2)+f(x)$

① 1 ② 3 ③ 4 ④ 2007 ⑤ 2008

해설

(나) 에서 $f(x+2)=f(x+1)-f(x)$ 이므로

$f(3)=f(2)-f(1)=2-1=1$

$f(4)=f(3)-f(2)=1-2=-1$

$f(5)=f(4)-f(3)=-1-1=-2$

$f(6)=f(5)-f(4)=-2-(-1)=-1$

$f(7)=f(6)-f(5)=-1-(-2)=1$

$f(8)=f(7)-f(6)=1-(-1)=2$

$\vdots$

따라서 $f(1)=f(7),\ f(2)=f(8),\ f(3)=f(9),\ \cdots,$

$f(x)=f(x+6)$ 이고

$f(1)+f(2)+f(3)+f(4)+f(5)+f(6)=0$ 이므로

$f(1)+f(2)+f(3)+\cdots+f(2008)$

$=334\left\{f(1)+f(2)+\cdots+f(5)+f(6)\right\}$

$\quad+f(2005)+f(2006)+f(2007)+f(2008)$

$=334\cdot 0+1+2+1+(-1)=3$

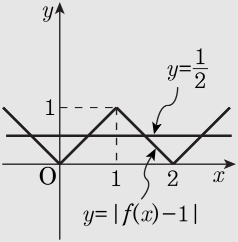
3. 함수 $f(x) = |x-1|$ 에 대하여 $(f \circ f)(x) = \frac{1}{2}$ 의 실근의 개수를 구하면?

① 0개 ② 1개 ③ 2개 ④ 3개 ⑤ 4개

해설

$(f \circ f)(x) = |f(x) - 1|$ 이므로

$y = |f(x) - 1|$ 의 그래프는 다음 그림과 같다.



따라서 함수 $y = |f(x) - 1|$ 의 그래프와

직선 $y = \frac{1}{2}$ 이 4 개의 점에서

만나므로 주어진 방정식의 실근의 개수는 4개이다.

4. 함수 $f(x)=2x+1$ 의 역함수를 $g(x)$ 라 할 때, 함수 $f(3x)$ 의 역함수를 $g(x)$ 를 이용하여 나타낸 것은?

① $\frac{1}{2}g(x)-\frac{1}{2}$ ② $\frac{1}{6}g(x)-\frac{1}{6}$ ③ $2g(x)-1$
④ $\frac{1}{3}g(x)$ ⑤ $\frac{1}{2}g(x)$

해설

$f(x)=2x+1$ 에서 $y=2x+1$ 이라 놓고

x 에 대하여 정리하면 $x=\dfrac{y-1}{2}$

x 와 y 를 바꾸어 쓰면 $y=\dfrac{x-1}{2}$

$\therefore\ f^{-1}(x)=g(x)=\dfrac{x-1}{2}$

$f(3x)=6x+1$ 에서 $y=6x+1$ 이라 놓고

x 에 대하여정리하면 $x=\dfrac{y-1}{6}$

x 와 y 를 바꾸어 쓰면 $y=\dfrac{x-1}{6}$

$\therefore\ f^{-1}(3x)=g(3x)=\dfrac{x-1}{6}$

$\therefore\ g(3x)=\dfrac{1}{3}\times\dfrac{x-1}{2}=\dfrac{1}{3}\cdot g(x)$

5. 두 함수 $f(x)=-x+5$, $g(x)=4x-1$ 에 대하여 $(f\circ h\circ g)(x)=2x-\dfrac{3}{2}$ 를 만족하는 함수 $h(x)$ 를 구하면?

① $h(x)=-\dfrac{1}{2}x+6$ ② $h(x)=-\dfrac{1}{2}x+3$

③ $h(x)=-\dfrac{1}{2}x+2$ ④ $h(x)=\dfrac{1}{2}x+5$

⑤ $h(x)=\dfrac{1}{2}x+8$

해설

$f(x)=-x+5$ 에서 $f^{-1}(x)=-x+5$ 이므로

$(f\circ h\circ g)(x)=2x-\dfrac{3}{2}$ 에서

$f(h(g(x)))=2x-\dfrac{3}{2}$ 이므로

$$\begin{aligned} h(g(x)) &= f^{-1}\left(2x-\frac{3}{2}\right) \\ &= -\left(2x-\frac{3}{2}\right)+5 \\ &= -2x+\frac{13}{2} \end{aligned}$$

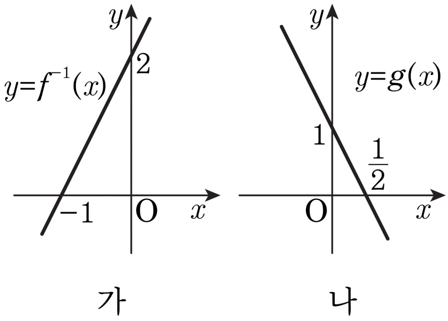
$\therefore\ h(4x-1)=-2x+\dfrac{13}{2}\cdots$ ㉠

㉠에서 $4x-1=t$ 라 하면 $x=\dfrac{t+1}{4}$ 이므로

$h(t)=-2\left(\dfrac{t+1}{4}\right)+\dfrac{13}{2}=-\dfrac{1}{2}t+6$ 이다.

따라서 $h(x)=-\dfrac{1}{2}x+6$

6. 다음의 그림 (가)는 함수 f 의 역함수 f^{-1} 의 그래프이고, 그림 (나)는 함수 g 의 그래프이다.



다음 중 함수 g 의 역함수 g^{-1} 을 함수 f 를 이용하여 나타내면?

① $y=-f(x+1)$ ② $y=f(x-1)$ ③ $y=-f(x-1)$
④ $y=f(x+1)$ ⑤ $y=-f(1-x)$

해설

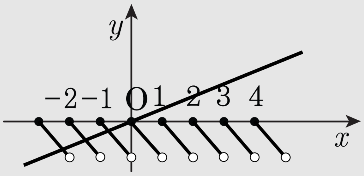
그림 (가) 의 그래프를 y 축에 대칭이동한 후
y 축의 방향으로 -1 만큼 평행이동하면
그림 (나) 의 그래프와 일치한다.
즉, $y=f^{-1}(x)$ 를 y 축에 대칭이동하면
$y=f^{-1}(-x)\cdots$㉠이다.
㉠을 y 축의 방향으로 -1 만큼 평행이동하면
$y=f^{-1}(-x)-1\cdots$㉡이다.
㉡의 역함수는 $x=f^{-1}(-y)-1\cdots$㉢이므로
㉢에서 $f^{-1}(-y)=x+1$ 이다.
$\therefore y=-f(x+1)$
$\therefore g^{-1}(x)=-f(x+1)$

7. 함수 $y=[x]-x$ 와 $y=\frac{1}{3}x$ 의 그래프가 만나는 점은 a 개이고, 이 점들의 x 좌표의 합은 b 이다. 이 때, $a+b$ 의 값은? (단, $[x]$ 는 x 를 넘지 않는 최대 정수이다.)

① $-\frac{5}{2}$ ② $-\frac{3}{2}$ ③ $-\frac{1}{2}$ ④ $\frac{1}{2}$ ⑤ $\frac{3}{2}$

해설

$-3 \le x < -2$ 일 때, $[x]=-3$ 이므로
$y=[x]-x=-3-x$
$-2 \le x < -1$ 일 때, $[x]=-2$ 이므로
$y=[x]-x=-2-x$
$-1 \le x < 0$ 일 때, $[x]=-1$ 이므로
$y=[x]-x=-1-x$
$0 \le x < 1$ 일 때, $[x]=0$ 이므로
$y=[x]-x=-x$
$1 \le 2x < 2$ 일 때, $[x]=1$ 이므로
$y=[x]-x=1-x$
따라서 $y=[x]-x$ 와 $y=\frac{1}{3}x$ 의 그래프는 다음과 같다.



그러므로 두 그래프가 만나는 점은 4개이고
만나는 점의 x 좌표는 다음과 같다.

i) $-3 \le x < -2$ 일 때, $-3-x=\frac{1}{3}x \quad \therefore x=-\frac{9}{4}$

ii) $-2 \le x < -1$ 일 때, $-2-x=\frac{1}{3}x \quad \therefore x=-\frac{3}{2}$

iii) $-1 \le x < 0$ 일 때, $-1-x=\frac{1}{3}x \quad \therefore x=-\frac{3}{4}$

iv) $0 \le x < 1$ 일 때, $-x=\frac{1}{3}x \quad \therefore x=0$

$\therefore \ a=4 \ , \ b=\left(-\frac{9}{4}\right)+\left(-\frac{3}{2}\right)+\left(-\frac{3}{4}\right)=-\frac{9}{2}$

$\therefore a+b=4+\left(-\frac{9}{2}\right)=-\frac{1}{2}$

8. a, b, c가 서로 다른 수이고, $< a,\ b,\ c >= \dfrac{a-c}{b-c}$라고 정의한다. $< a,\ b,\ c >= x$라 할 때, $< b,\ c,\ a >$를 x에 관한 식으로 나타내어 그것을 $f(x)$라 하자. 이때, x에 관한 식 $f(x)$에 대하여 $f(2)\times f(3)\times\cdots\times f(10)$의 값을 구하면?

① $\dfrac{1}{2}$ ② $\dfrac{1}{4}$ ③ $\dfrac{1}{6}$ ④ $\dfrac{1}{8}$ ⑤ $\dfrac{1}{10}$

해설

(i) $< a,\ b,\ c >= \dfrac{a-c}{b-c} = x$

$\therefore\ \ a = c + (b-c)x$

(ii) $< b,\ c,\ a > = \dfrac{b-a}{c-a} = \dfrac{b-\{c+(b-c)x\}}{c-\{c+(b-c)x\}}$

$$= \frac{(b-c)(1-x)}{-(b-c)x} = \frac{x-1}{x}$$

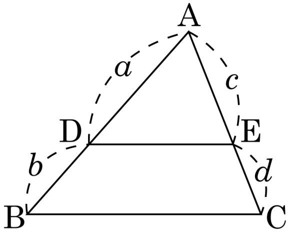
$\therefore\ \ f(x) = \dfrac{x-1}{x}$

$\therefore f(2)\times f(3)\times\cdots\times f(9)\times f(10)$

$= \dfrac{1}{2}\times\dfrac{2}{3}\times\dfrac{3}{4}\times\cdots\times\dfrac{8}{9}\times\dfrac{9}{10}$

$= \dfrac{1}{10}$

9. 다음 그림과 같이 $\overline{DE} // \overline{BC}$인 삼각형 ABC가 있다. $\overline{AD} = a$, $\overline{DB} = b$, $\overline{AE} = c$, $\overline{EC} = d$일 때, 다음 중 a, b, c, d사이의 관계로 옳지 <u>않은</u> 것은? (단, $a \neq b$)



① $ad = bc$

② $\dfrac{a+b}{b} = \dfrac{c+d}{d}$

③ $\dfrac{a-b}{b} = \dfrac{c-d}{d}$

④ $\dfrac{c+d}{a+b} = \dfrac{d}{a}$

⑤ $\dfrac{c+d}{a+b} = \dfrac{c-d}{a-b}$

해설

$\overline{DE} // \overline{BC}$이므로

$a : b = c : d \Leftrightarrow \dfrac{a}{b} = \dfrac{c}{d} \cdots$ ㉠

① $\dfrac{a}{b} = \dfrac{c}{d}$이므로 $ad = bc$

② $\dfrac{a}{b} = \dfrac{c}{d}$이므로 $\dfrac{a}{b} + 1 = \dfrac{c}{d} + 1$

$\therefore \dfrac{a+b}{b} = \dfrac{c+d}{d} \cdots$ ㉡

③ $\dfrac{a}{b} = \dfrac{c}{d}$이므로 $\dfrac{a}{b} - 1 = \dfrac{c}{d} - 1$

$\therefore \dfrac{a-b}{b} = \dfrac{c-d}{d} \cdots$ ㉢

④ ㉠ ÷ ㉡에서 $\dfrac{a}{a+b} = \dfrac{c}{c+d}$

$\therefore \dfrac{c+d}{a+b} = \dfrac{c}{a}$

⑤ ㉢ ÷ ㉡에서 $\dfrac{a-b}{a+b} = \dfrac{c-d}{c+d}$

$\therefore \dfrac{c+d}{a+b} = \dfrac{c-d}{a-b}$

10. 어느 도시의 택시 요금은 주행 거리 2 km 미만에서는 1000 원이고, 2 km 가 되는 순간에 1200 원이 되고 그 후부터는 매 500 m 증가할 때마다 200 원씩 요금이 추가된다고 한다. 택시를 타고 간 거리가 x km(단, $x > 2$) 일 때의 택시 요금을 나타내는 식은? (단, $[x]$는 x를 넘지 않는 최대의 정수를 나타낸다.)

① $1000 + 200[x]$
② $1000 + 200([x] - 1)$
③ $1000 + 200([x] - 1)$
④ $1000 + 200([x] - 2)$
⑤ $1000 + 200([2x] - 3)$

해설

거리 x가 $2 < x < 2.5$일 때
$4 < 2x < 5$이므로 $[2x] = 4$이고
요금은 $1000 + 200 \times 1 = 1000 + 200([2x] - 3)$ 원이다.
$2.5 \le x < 3$일 때
$5 \le 2x < 6$이므로 $[2x] = 5$이고
요금은 $1000 + 200 \times 2 = 1000 + 200([2x] - 3)$ 원이다.
$3 \le x < 3.5$일 때
$6 \le 2x < 7$이므로 $[2x] = 6$이고
요금은 $1000 + 200 \times 3 = 1000 + 200([2x] - 3)$ 원이다.
따라서 x km를 타고 갔을 때, 요금은
$1000 + 200([2x] - 3)$ 원이라고 추정할 수 있다.

11. a가 실수일 때, $f(a) = \sqrt{(a+\sqrt{a^2})^2} - \sqrt{(a-\sqrt{a^2})^2}$ 을 간단히 하면?

① a　② $2a$　③ $-a$　④ $-2a$　⑤ 0

해설

$\sqrt{a^2} = |a|$ 이므로 $f(a) = |a+|a|| - |a-|a||$
$a \geq 0$ 인 경우와 $a < 0$ 인 경우로 나누어 생각하면
(i) $a \geq 0$ 일 때,
$f(a) = |a+a| - |a-a| = |2a| = 2a$
(ii) $a < 0$ 일 때,
$f(a) = |a-a| - |a-(-a)| = -|2a| = 2a$
따라서 모든 실수 a에 대하여 $f(a) = 2a$

12. $\sqrt{17+\sqrt{288}}$의 소수 부분을 x라 할 때,

$\sqrt{\dfrac{x+2+\sqrt{4x+x^2}}{x+2-\sqrt{4x+x^2}}}$의 값을 구하면?

① $\sqrt{2}+1$ ② $\sqrt{3}+1$ ③ $\sqrt{2}-1$

④ $\sqrt{3}-1$ ⑤ $\sqrt{5}-2$

해설

$\sqrt{17+\sqrt{288}}$

$=\sqrt{17+2\sqrt{72}}$

$=\sqrt{9}+\sqrt{8}$ $(\leftarrow 17=9+8,\ 72=9\times 8)$

$=3+2\sqrt{2}$ $(\leftarrow \sqrt{2}=1.4\times\times)$

$=5.8\times\times$ 이므로 소수부분은 $3+2\sqrt{2}-5$이다.

$\therefore\ x=2\sqrt{2}-2 \quad \therefore x+2=2\sqrt{2}$

또, $x^2+4x+4=(x+2)^2$이므로

$x^2+4x=(x+2)^2-4=(2\sqrt{2})^2-4=4$

따라서 준식에 $x+2=2\sqrt{2}$

$x^2+4x=4$를 대입시키면

$$\sqrt{\frac{x+2+\sqrt{4x+x^2}}{x+2-\sqrt{4x+x^2}}}$$

$$=\sqrt{\frac{2\sqrt{2}+2}{2\sqrt{2}-2}}$$

$$=\sqrt{\frac{\sqrt{2}+1}{\sqrt{2}-1}}=\sqrt{\frac{(\sqrt{2}+1)(\sqrt{2}+1)}{(\sqrt{2}-1)(\sqrt{2}+1)}}$$

$$=\sqrt{(\sqrt{2}+1)^2}=\sqrt{2}+1$$

13. a, b는 실수이고 $a^3 = 26 + 15\sqrt{3}$, $b^3 = 26 - 15\sqrt{3}$일 때, $\dfrac{\sqrt{a} + \sqrt{b}}{\sqrt{a} - \sqrt{b}}$의 값은?

① $-2\sqrt{3}$ ② $-\sqrt{3}$ ③ $2\sqrt{3}$

④ $\sqrt{3}$ ⑤ 1

해설

$$a^3 + b^3 = (a+b)^3 - 3ab(a+b)$$
$$= 26 + 15\sqrt{3} + 26 - 15\sqrt{3} = 52 \cdots ①$$
$$(ab)^3 = a^3b^3 = (26+15\sqrt{3})(26-15\sqrt{3}) = 1$$
$\therefore$ $ab = 1$, $a + b = t$로 놓으면

① 에서 $t^3 - 3t - 52 = 0$, $(t-4)(t^2+4t+13) = 0$

a, b가 실수이므로 t도 실수이다.

$\therefore$ $t = 4$, 즉 $a + b = 4$

$$(\text{준식}) = \frac{(\sqrt{a}+\sqrt{b})^2}{(\sqrt{a}-\sqrt{b})(\sqrt{a}+\sqrt{b})}$$
$$= \frac{a+b+2\sqrt{ab}}{a-b}$$

$a+b=4$, $ab=1$이므로

a, b는 $x^2 - 4x + 1 = 0$의 근이고

$a^3 > b^3$이므로 $a > b$

$\therefore$ $a = 2+\sqrt{3}$, $b = 2-\sqrt{3}$

$\therefore$ $a - b = 2\sqrt{3}$

$$\therefore (\text{준식}) = \frac{4+2}{2\sqrt{3}} = \sqrt{3}$$

14. 임의의 자연수 n에 대하여 $(1+\sqrt{3})^n = a_n + b_n\sqrt{3}$ (a_n, b_n은 유리수)로 나타날 때, $a_5^2 - 3b_5^2$의 값은?

① -2^5 ② -3^2 ③ 0 ④ 1 ⑤ 2^5

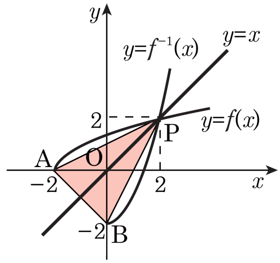
해설

$(1+\sqrt{3})^n = a_n + b_n\sqrt{3}$이라 하면

$(1-\sqrt{3})^n = a_n - b_n\sqrt{3}$의 꼴로 나타낼 수 있다.

$$\begin{aligned}\therefore\ a_5^2 - 3b_5^2 &= (a_5 - b_5\sqrt{3})(a_5 + b_5\sqrt{3}) \\ &= (1-\sqrt{3})^5(1+\sqrt{3})^5 \\ &= (-2)^5 = -2^5\end{aligned}$$

15. 무리함수 $f(x)=\sqrt{x+2}$에 대하여 $y=f(x)$의 그래프와 x축이 만나는 점을 A, $y=f^{-1}(x)$의 그래프와 y축이 만나는 점을 B라 하자. $y=f(x)$와 $y=f^{-1}(x)$의 그래프가 만나는 교점을 P라고 할 때, 삼각형 ABP의 넓이를 구하면?



① 5　② 6　③ $4\sqrt{2}$

④ 8　⑤ 10

해설

$y=f(x)=\sqrt{x+2}$ 의 정의역은 $\{x \mid x \geq -2\}$, 치역은 $\{y \mid y \geq 0\}$

x 와 y 를 서로 바꾸면 $x=\sqrt{y+2}$

y 에 관하여 정리하면 $y=x^2-2$

따라서 $y=f^{-1}(x)=x^2-2$이고,

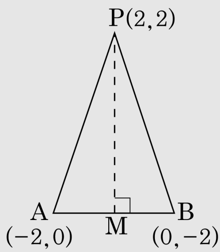
정의역은 $\{x \mid x \geq 0\}$, 치역은 $\{y \mid y \geq -2\}$

이때, $y=f(x)$ 와

$y=f^{-1}(x)$의 교점은

$y=f(x)$ 와 $y=x$ 의

교점과 같다.



$\sqrt{x+2}=x,\ x+2=x^2$

$x^2-x-2=0$,

$x=2$ 또는 $x=-1$

$\therefore x=2,\ y=2(\because x>0)$

$\therefore \mathrm{P}(2,\ 2)$

$\overline{\mathrm{AB}}$ 의 중점을 M이라 하면 M $(-1,\ -1)$

$\triangle\mathrm{ABP}$는 $\overline{\mathrm{AP}}=\overline{\mathrm{BP}}$인 이등변삼각형이므로

$\overline{\mathrm{AB}}\perp\overline{\mathrm{PM}}$ 이다.

$\overline{\mathrm{AB}}=\sqrt{2^2+2^2}=2\sqrt{2}$

$\overline{\mathrm{PM}}=\sqrt{3^2+3^2}=3\sqrt{2}$

따라서 $\triangle\mathrm{ABP}$ 의 넓이를 S라 하면

$$\mathrm{S}=\frac{1}{2}\times\overline{\mathrm{AB}}\times\overline{\mathrm{PM}}=\frac{1}{2}\times2\sqrt{2}\times3\sqrt{2}=6$$