

1. 직선 $y = 3x + 2$ 와 포물선 $y = x^2 + mx + 3$ 이 두 점에서 만나기 위한 실수 m 의 범위를 구하면?

- ① $m < -1, m > 3$ ② $m < 1, m > 5$ ③ $-1 < m < 3$
④ $-1 < m < 5$ ⑤ $1 < m < 5$

해설

$y = 3x + 2, y = x^2 + mx + 3$ 에서 y 를 소거하면
 $x^2 + (m - 3)x + 1 = 0, D = (m - 3)^2 - 4 > 0$
 $m^2 - 6m + 5 > 0, (m - 1)(m - 5) > 0$
 $\therefore m < 1, m > 5$

2. 두 포물선 $y = x^2 - 2ax + 4$, $y = x^2 - 2(a-1)x + 2a^2 - 6a + 4$ 중 하나만이 x 축과 만날 때, 상수 a 의 값의 범위를 구하면?

① $a \leq -5$ 또는 $-3 \leq a < -1$ 또는 $a > 0$

② $a \leq -4$ 또는 $-1 \leq a < 1$ 또는 $a > 2$

③ $a \leq -2$ 또는 $1 \leq a < 2$ 또는 $a > 3$

④ $a \leq 0$ 또는 $2 \leq a < 3$ 또는 $a > 5$

⑤ $a \leq 1$ 또는 $3 \leq a < 4$ 또는 $a > 9$

해설

이차방정식 $x^2 - 2ax + 4 = 0$, $x^2 - 2(a-1)x + 2a^2 - 6a + 4 = 0$ 의 판별식을 각각 D_1 , D_2 라 하자. $y = x^2 - 2ax + 4$ 의 그래프가

x 축과 만날 조건은 $\frac{D_1}{4} = a^2 - 4 \geq 0$

$\therefore a \leq -2$ 또는 $a \geq 2$ ㉠

$y = x^2 - 2(a-1)x + 2a^2 - 6a + 4$ 의 그래프가 x 축과 만날 조건은

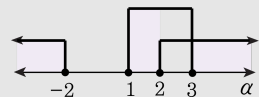
$\frac{D_2}{4} = (a-1)^2 - 2a^2 + 6a - 4 \geq 0$

$-a^2 + 4a - 3 \geq 0$, $a^2 - 4a + 3 \leq 0$

$(a-1)(a-3) \leq 0$

$\therefore 1 \leq a \leq 3$ ㉡

두 개의 포물선 중 하나만이 x 축과 만나려면 ㉠, ㉡을 수직선 위에 나타내어 ㉠, ㉡중 하나만을 만족하는 a 의 값의 범위를 구하면 된다.



따라서, 구하는 a 의 값의 범위는 $a \leq -2$ 또는 $1 \leq a < 2$ 또는 $a > 3$

3. 이차함수 $y = -x^2 - 4x + k$ 의 그래프를 y 축의 방향으로 -3 만큼 평행이동한 그래프가 x 축에 접할 때, 상수 k 의 값은?

① -1 ② 0 ③ 1 ④ 2 ⑤ 3

해설

$y = -x^2 - 4x + k$ 의 그래프를
 y 축의 방향으로 -3 만큼 평행이동하면
 $y - (-3) = -x^2 - 4x + k$
 $y = -x^2 - 4x + k - 3$
 $\therefore y = -(x + 2)^2 + k + 1$
이 그래프가 x 축에 접하려면
꼭지점의 y 좌표가 0 이어야 하므로 $k + 1 = 0$
 $\therefore k = -1$

4. 두 이차함수 $y = x^2$, $y = -x^2 - 2x - 1$ 의 그래프에 동시에 접하는 직선의 방정식을 $y = ax + b$ 라 할 때, 상수 a, b 에 대하여 $a^3 + b^3$ 의 값은? (단, $a \neq 0$)

① -9

② -8

③ -7

④ -6

⑤ -5

해설

이차함수 $y = x^2$ 의 그래프와
직선 $y = ax + b$ 가 접하므로
이차방정식 $x^2 = ax + b$,
즉 $x^2 - ax - b = 0$ 의 판별식을 D_1 이라 할 때,
 $D_1 = (-a)^2 - 4 \cdot (-b) = 0, a^2 + 4b = 0$
 $\therefore 4b = -a^2 \quad \cdots \textcircled{A}$
또, 이차함수 $y = -x^2 - 2x - 1$ 의 그래프와
직선 $y = ax + b$ 가 접하므로
이차방정식 $-x^2 - 2x - 1 = ax + b$,
즉 $x^2 + (a+2)x + b+1 = 0$ 의 판별식을
 D_2 라 할 때,
 $D_2 = (a+2)^2 - 4(b+1) = 0$
 $\therefore a^2 + 4a - 4b = 0 \quad \cdots \textcircled{B}$
 $\textcircled{A}$ 을 $\textcircled{B}$ 에 대입하여 정리하면 $2a^2 + 4a = 0$
 $2a(a+2) = 0 \quad \therefore a = -2 (\because a \neq 0)$
 $a = -2$ 를 $\textcircled{A}$ 에 대입하면
 $4b = -4 \quad \therefore b = -1$
 $\therefore a^3 + b^3 = (-2)^3 + (-1)^3 = -9$

5. 점 $(0, -2)$ 를 지나고 이차함수 $y = x^2 - 2x + 2$ 에 접하는 직선의 방정식을 구하면?
- ① $y = x - 1$ 또는 $y = -x - 2$
- ② $y = x - 2$ 또는 $y = -3x - 1$
- ③ $y = 2x - 2$ 또는 $y = -6x - 2$
- ④ $y = 3x - 3$ 또는 $y = x + 1$
- ⑤ $y = 4x - 4$ 또는 $y = 5x + 3$

해설

점 $(0, -2)$ 를 지나는 직선의 방정식을 $y = mx - 2$ 라 하고
이 식과 이차함수 $y = x^2 - 2x + 2$ 를 연립하면
 $x^2 - 2x + 2 = mx - 2, x^2 - (m + 2)x + 4 = 0$
이 이차방정식이 중근을 가지므로 판별식 $D = 0$ 이다.
 $D = (m + 2)^2 - 4 \cdot 4 = 0$
 $m^2 + 4m - 12 = 0 \quad (m + 6)(m - 2) = 0$
 $\therefore m = 2$ 또는 $m = -6$
따라서, 구하는 직선의 방정식은
 $y = 2x - 2$ 또는 $y = -6x - 2$

6. 직선 $y = ax + 1$ 이 이차함수 $y = x^2 - 3x + 5$ 의 그래프와 서로 다른 두 점에서 만나고, 이차함수 $y = x^2 + 3x + 5$ 의 그래프와는 만나지 않을 때, 상수 a 의 값의 범위를 구하면?

① $a < -7$ 또는 $a > 1$ ② $-1 < a < 7$

③ $a < 7$ ④ $-7 < a < 1$

⑤ $1 < a < 7$

해설

$ax + 1 = x^2 - 3x + 5$ 에서 $x^2 - (a + 3)x + 4 = 0$

(판별식) $= (a + 3)^2 - 4 \cdot 1 \cdot 4 > 0$

$a < -7$ 또는 $a > 1 \cdots \textcircled{\text{㉠}}$

$ax + 1 = x^2 + 3x + 5$ 에서 $x^2 - (a - 3)x + 4 = 0$

(판별식) $= (a - 3)^2 - 4 \cdot 1 \cdot 4 < 0$

$\therefore -1 < a < 7 \cdots \textcircled{\text{㉡}}$

$\textcircled{\text{㉠}}, \textcircled{\text{㉡}}$ 을 동시에 만족하는 상수 a 의 값의 범위는 $1 < a < 7$

7. 이차함수 $y = 2x^2 - 3x + 1$ 의 그래프와 직선 $y = ax + b$ 의 두 교점의 x 좌표가 각각 1, 5일 때, 상수 a , b 의 곱 ab 의 값은?

① -81 ② -45 ③ 0 ④ 5 ⑤ 14

해설

이차방정식 $2x^2 - 3x + 1 = ax + b$, 즉 $2x^2 - (3 + a)x + 1 - b = 0$

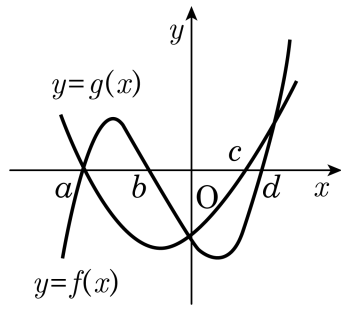
의 두 근이 1, 5이므로 근과 계수의 관계에 의하여

$$1 + 5 = \frac{3 + a}{2}, \quad 1 \times 5 = \frac{1 - b}{2}$$

$$\therefore a = 9, \quad b = -9$$

$$\therefore ab = -81$$

8. 두 개의 방정식 $f(x) = 0$, $g(x) = 0$ 을 좌표평면에 나타내었더니 다음 그림과 같았다. 이 때, 다음 중 $\{f(x)\}^2 + \{g(x)\}^2 = 0$ 를 만족하는 것을 고르면?



- ① a ② a, b ③ a, c
 ④ a, b, d ⑤ a, b, c, d

해설

$f(x) = 0$, $g(x) = 0$ 를 모두 만족하는 것은 a 이다.
 $(\because$ 실수 a, b 에 대하여 $a^2 + b^2 = 0$ 이면
 $a = 0$ 이고 $b = 0$ 이다.)

9. $y = x^2 - (a^2 - 4a + 3)x + a^2 + 2$ 와 $y = x$ 의 두 교점이 원점에 관하여 대칭이다. 이 때, a 의 값을 구하면?

① 4

② 2

③ -4

④ -2

⑤ 3

해설

$$y = x^2 - (a^2 - 4a + 3)x + a^2 + 2$$

$$y = x \text{ 의 교점은 } x^2 - (a^2 - 4a + 3)x + a^2 + 2 = x$$

$$x^2 - (a^2 - 4a + 4)x + a^2 + 2 = 0 \text{ 의 두 근을 } \alpha, \beta \text{ 라면}$$

두 근이 원점에 대칭이므로 중점은 원점이다.

$$\therefore \frac{\alpha + \beta}{2} = \frac{(a - 2)^2}{2} = 0$$

$$\therefore a = 2$$

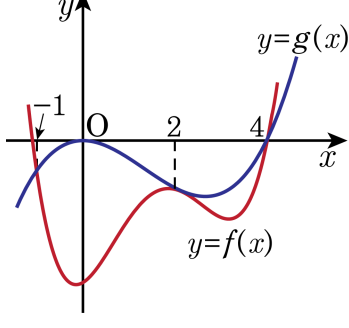
10. 직선 $y = 2x + k$ 가 이차함수 $y = x^2$ 의 그래프와 서로 다른 두 점에서 만나고, 이 두 점 사이의 거리가 $2\sqrt{10}$ 일 때, 상수 k 의 값은?

① -1 ② 1 ③ 2 ④ 3 ⑤ 4

해설

이차방정식 $2x + k = x^2$,
즉 $x^2 - 2x - k = 0$ 의 두 근을 α, β 라 하면
근과 계수의 관계에 의하여
 $\alpha + \beta = 2, \alpha\beta = -k$
두 그래프의 교점의 좌표를
 $(\alpha, 2\alpha + k), (\beta, 2\beta + k)$ 라 하면
두 점 사이의 거리가 $2\sqrt{10}$ 이므로
 $\sqrt{(\alpha - \beta)^2 + (\alpha^2 - \beta^2)^2} = 2\sqrt{10}$ 에서
 $\sqrt{5(\alpha - \beta)^2} = 2\sqrt{10}$
 $\therefore |\alpha - \beta| = 2\sqrt{2}$
이때, $(\alpha - \beta)^2 = (\alpha + \beta)^2 - 4\alpha\beta$ 에서
 $(2\sqrt{2})^2 = 2^2 - 4(-k), 8 = 4 + 4k$
 $\therefore k = 1$

11. 사차방정식 $\frac{1}{3}x^4+ax^3+bx^2+cx+d=0$ 과 삼차방정식 $\frac{1}{3}x^2(x-4)=0$ 을 좌표평면에 함수 $f(x), g(x)$ 로 각각 나타내었다. 이 때, $a+b+c+d$ 의 값은?



- ① -4 ② $-\frac{10}{3}$ ③ -3 ④ $-\frac{7}{3}$ ⑤ -2

해설

$f(x) = g(x)$ 에서 $f(x) - g(x) = 0$
 $F(x) = f(x) - g(x)$ 라 하면
 $F(x) = 0$ 은 $x = -1, 2$ (중근),
 4 를 근으로 가진다.
 $\therefore F(x) = k(x+1)(x-2)^2(x-4)$
 $f(x)$ 의 최고차항의 계수가 $\frac{1}{3}$ 이므로 $k = \frac{1}{3}$
 $f(x) = F(x) + g(x)$ 이므로
 $\frac{1}{3}x^4 + ax^3 + bx^2 + cx + d$
 $= \frac{1}{3}(x+1)(x-2)^2(x-4) + \frac{1}{3}x^2(x-4)$
양변에 $x = 1$ 을 대입하면
 $\frac{1}{3} + a + b + c + d = \frac{1}{3} \cdot 2 \cdot 1 \cdot (-3) + \frac{1}{3} \cdot 1 \cdot (-3)$
 $\therefore a + b + c + d = -\frac{10}{3}$