

1. 이차함수 $y = x^2 + (k - 3)x + k$ 의 그래프가 x 축과 만나지 않을 때, 실수 k 의 값의 범위는?

① $-1 < k < 7$

② $-1 < k < 8$

③ $0 < k < 9$

④ $1 < k < 9$

⑤ $1 < k < 10$

해설

주어진 이차함수의 그래프가

x 축과 만나지 않으려면

이차방정식 $x^2 + (k - 3)x + k = 0$ 이

실근을 갖지 않아야 하므로

$$D = (k - 3)^2 - 4k < 0$$

$$k^2 - 10k + 9 < 0, (k - 1)(k - 9) < 0$$

$$\therefore 1 < k < 9$$

2. 이차함수 $y = x^2 - 2ax - 2b^2 - 4a + 4b - 6$ 의 그래프가 x 축에 접할 때, $a^2 + b^2$ 의 값은? (단, a, b 는 실수)

① 2

② 5

③ 8

④ 10

⑤ 13

해설

$$x^2 - 2ax - 2b^2 - 4a + 4b - 6 = 0 \text{에서}$$

$$\frac{D}{4} = a^2 - (-2b^2 - 4a + 4b - 6) = 0$$

$$\therefore (a + 2)^2 + 2(b - 1)^2 = 0$$

이 때, a, b 가 실수이므로 $a + 2 = 0, b - 1 = 0$

따라서 $a = -2, b = 1$ 이므로

$$a^2 + b^2 = 5$$

3. 두 이차함수의 그래프 $y = x^2 - 2ax + 4$, $y = 2x^2 - 2ax + a^2 + 3a$ 가 모두 x 축과 교점을 갖도록 상수 a 의 값의 범위를 정하면?

① $-9 \leq a \leq -5$

② $-6 \leq a \leq -2$

③ $-3 \leq a \leq 0$

④ $2 \leq a \leq 5$

⑤ $3 \leq a \leq 7$

해설

이차함수 $y = x^2 - 2ax + 4$ 의 그래프가 x 축과 교점을 가지려면 $x^2 - 2ax + 4 = 0$ 에서

$$\frac{D_1}{4} = a^2 - 1 \cdot 4 \geq 0, a^2 - 4 \geq 0, (a+2)(a-2) \geq 0$$

$$\therefore a \leq -2 \text{ 또는 } a \geq 2 \dots\dots \textcircled{\text{㉠}}$$

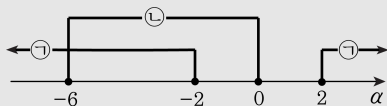
또, 이차함수 $y = 2x^2 - 2ax + a^2 + 3a$ 의 그래프가 x 축과 교점을 가지려면

$$2x^2 - 2ax + (a^2 + 3a) = 0 \text{에서}$$

$$\frac{D_2}{4} = a^2 - 2(a^2 + 3a) \geq 0, a^2 + 6a \leq 0, a(a+6) \leq 0$$

$$\therefore -6 \leq a \leq 0 \dots\dots \textcircled{\text{㉡}}$$

이 때, ㉠, ㉡을 수직선 위에 나타내면 다음과 같다.



(1) 두 그래프 모두 x 축과 교점을 갖도록 하는 a 의 값의 범위는 위의 수직선에 ㉠과 ㉡의 공통 부분이므로 $-6 \leq a \leq -2$

4. 이차함수 $y = x^2 + 2x + k$ 의 그래프가 x 축과 만나는 두 점 사이의 거리가 $4\sqrt{2}$ 일 때, 상수 k 의 값은?

① -8

② -7

③ -6

④ -5

⑤ -4

해설

이차함수 $y = x^2 + 2x + k$ 의 그래프가 x 축과 만나는 두 점의 x 좌표를 각각 α , β ($\alpha < \beta$)라고 하면 α , β 는 이차방정식 $x^2 + 2x + k = 0$ 의 두 실근이다.

이 때, 근과 계수의 관계에 의하여 $\alpha + \beta = -2$, $\alpha\beta = k$ 이고 x 축 위의 두 교점 사이의 거리가 $4\sqrt{2}$ 이므로 $\beta - \alpha = 4\sqrt{2}$

$$(\alpha - \beta)^2 = (\alpha + \beta)^2 - 4\alpha\beta \text{에서 } (4\sqrt{2})^2 = (-2)^2 - 4k, 32 = 4 - 4k \\ \therefore k = -7$$

5. 이차함수 $y = x^2 - 2(k-1)x + 9$ 의 그래프가 x 축과 만나지 않기 위한 정수 k 의 개수는?

① 4개

② 5개

③ 6개

④ 7개

⑤ 8개

해설

이차함수 $y = x^2 - 2(k-1)x + 9$ 의 그래프가 x 축과 만나지 않으려면

이차방정식 $y = x^2 - 2(k-1)x + 9 = 0$ 의 판별식을 D 라 할 때 $D < 0$ 이어야 한다.

$$\frac{D}{4} = (k-1)^2 - 9 < 0$$

$$k^2 - 2k - 8 < 0, (k+2)(k-4) < 0$$

$$\therefore -2 < k < 4$$

따라서, k 값 중 정수인 것은 $-1, 0, 1, 2, 3$ 의 5개이다.

6. 포물선 $y = x^2 - 2x + 4k$ 의 그래프가 x 축과 서로 만나지 않을 때의 k 의 범위를 구하면?

① $k < \frac{1}{2}$

② $k < -\frac{1}{2}$

③ $k > \frac{1}{4}$

④ $k < \frac{1}{4}$

⑤ $k > -\frac{1}{4}$

해설

$y = x^2 - 2x + 4k$ 의 그래프가 x 축과
만나지 않으려면 판별식 D 가

$D < 0$ 이어야 하므로

$$\frac{D}{4} = 1 - 4k < 0$$

$$\therefore k > \frac{1}{4}$$

7. 직선 $y = x + 4$ 에 평행하고, 곡선 $y = -x^2 + 2$ 에 접하는 직선의 방정식은?

① $4x + 4y = 9$

② $4x - 4y = 9$

③ $-4x + 4y = 9$

④ $-4x - 4y = 5$

⑤ $-4x - 4y = -5$

해설

직선 $y = x + 4$ 에 평행한 직선의 방정식을 $y = x + k$ 라 하면

이차방정식 $x + k = -x^2 + 2$,

즉 $x^2 + x + k - 2 = 0$ 의 판별식을 D 라 할 때,

$$D = 1 - 4k + 8 = 0$$

$$\therefore k = \frac{9}{4}$$

따라서, 구하는 직선의 방정식은 $y = x + \frac{9}{4}$

$$\therefore -4x + 4y = 9$$

8. 이차함수 $y = x^2 - ax + 1$ 의 그래프가 x 축과 만나지 않을 때, $f(a) = a^2 - 2a + 2$ 의 최솟값은?

① 1

② 2

③ 3

④ $\sqrt{2}$

⑤ 5

해설

x 축과 만나지 않으려면
판별식이 0 보다 작아야 한다.

$$\Rightarrow D = a^2 - 4 < 0$$

$$\therefore -2 < a < 2$$

$$f(a) = (a - 1)^2 + 1$$

$\therefore a = 1$ 일 때, 최솟값 1

9. 직선 $y = -x + 1$ 을 x 축의 방향으로 m 만큼 평행이동 하였더니 이차함수 $y = x^2 - 3x$ 의 그래프에 접하였다. 이때, 상수 m 의 값은?



①

-2

② -1

③ 1

④ 2

⑤ 3

해설

직선 $y = -x + 1$ 을 x 축의 방향으로
 m 만큼 평행이동하면

$$y = -(x - m) + 1 = -x + m + 1$$

이 직선이 $y = x^2 - 3x$ 의 그래프와 접하므로

$$\text{이차방정식 } x^2 - 3x = -x + m + 1,$$

즉, $x^2 - 2x - m - 1 = 0$ 에서

$$\frac{D}{4} = (-1)^2 - (-m - 1) = 0$$

$$2 + m = 0 \quad \therefore m = -2$$

10. 이차함수 $y = x^2 + ax + b$ 의 그래프가 두 직선 $y = \frac{1}{2}x$ 와 $y = -2x$ 에 모두 접할 때, 상수 a 의 값은?

① -2

② $-\frac{3}{2}$

③ -1

④ $-\frac{3}{4}$

⑤ $-\frac{1}{4}$

해설

$$x^2 + ax + b = -2x \text{에서}$$

$$x^2 + (a+2)x + b = 0$$

$$\therefore D = (a+2)^2 - 4b = 0 \dots \textcircled{1}$$

$$x^2 + ax + b = \frac{1}{2}x \text{에서}$$

$$x^2 + \left(a - \frac{1}{2}\right)x + b = 0$$

$$D = \left(a - \frac{1}{2}\right)^2 - 4b = 0 \dots \textcircled{2}$$

$$\textcircled{1}, \textcircled{2} \text{에서 } (a+2)^2 = \left(a - \frac{1}{2}\right)^2$$

$$\therefore a = -\frac{3}{4}$$

11. 이차함수 $y = x^2 + 3x + 1$ 의 그래프와 직선 $y = -x + 3$ 의 두 교점의 좌표를 (x_1, y_1) , (x_2, y_2) 라 할 때, y_1y_2 의 값은?

① 11

② 13

③ 15

④ 17

⑤ 19

해설

두 교점의 x 좌표 x_1, x_2 는

방정식 $x^2 + 3x + 1 = -x + 3$ 의 실근이다.

$x^2 + 4x - 2 = 0$ 에서 근과 계수의 관계에 의하여

$$x_1 + x_2 = -4, x_1x_2 = -2$$

$$\begin{aligned}\therefore y_1y_2 &= (-x_1 + 3)(-x_2 + 3) \\ &= x_1x_2 - 3(x_1 + x_2) + 9 \\ &= -2 + 12 + 9 = 19\end{aligned}$$

12. 이차함수 $y = ax^2 - 5x - 2$ 의 그래프와 직선 $y = bx + a$ 의 교점의 x 좌표가 각각 0, -3 일 때, 상수 a, b 의 합 $a + b$ 의 값은?

① -3

② -2

③ -1

④ 0

⑤ 1

해설

이차함수 $y = ax^2 - 5x - 2$ 의 그래프와

직선 $y = bx + a$ 의 교점의 x 좌표 0, -3 은

이차방정식 $ax^2 - (b+5)x - a - 2 = 0$ 의 두 근이므로 근과 계수의
관계에 의하여

$$(\text{두근의합}) = 0 + (-3) = \frac{b+5}{a}$$

$$\therefore 3a + b = -5 \cdots \text{㉠}$$

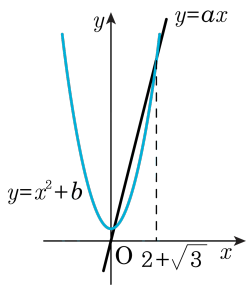
$$(\text{두 근의 곱}) = 0 \cdot (-3) = \frac{-a-2}{a}$$

$$\therefore a = -2$$

$$\text{㉠에서 } b = 1 \text{ 이므로 } a + b = -1$$

13. 다음 그림과 같이 이차함수 $y = x^2 + b$ 의 그래프와 직선 $y = ax$ 가 서로 두 점에서 만나고, 한 교점의 x 좌표가 $2 + \sqrt{3}$ 일 때, $a + b$ 의 값은?(단, a, b 는 유리수)

- ① 1 ② 2 ③ 3 ④ 4 ⑤ 5



해설

$$x^2 + b = ax,$$

즉 $x^2 - ax + b = 0$ 의 한 근이 $2 + \sqrt{3}$ 이다.

이때, a, b 는 모두 유리수이므로

방정식 $x^2 - ax + b = 0$ 의 한 근이 $2 + \sqrt{3}$ 이면

다른 한 근은 $2 - \sqrt{3}$ 이다.

따라서 근과 계수와의 관계에 의하여

$$a = (2 + \sqrt{3}) + (2 - \sqrt{3}) = 4,$$

$$b = (2 + \sqrt{3})(2 - \sqrt{3}) = 1$$

$$\therefore a + b = 5$$

14. 두 이차함수 $y = x^2 - ax + b$ 와 $y = x^2 - bx + a$ 의 그래프의 교점이 x 축 위에 있도록 상수 a, b 의 값을 정할 때, $a + b$ 의 값은? (단, $a \neq b$)

① -2

② -1

③ 0

④ 1

⑤ 2

해설

교점의 x 좌표를 p 라 하면

$$p^2 - ap + b = p^2 - bp + a$$

$$(a - b)p + a - b = 0$$

$$(a - b)(p + 1) = 0$$

$$a \neq b \text{ 이므로 } p = -1$$

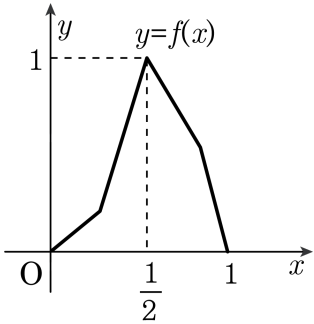
그런데 교점이 x 축 위에 있으므로

교점의 y 좌표는 0 이다.

$$\therefore 1 + a + b = 0$$

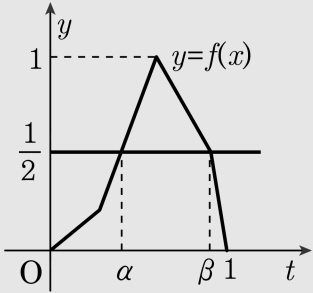
$$\therefore a + b = -1$$

15. 함수 $y = f(x)$ 의 그래프가 다음과 같을 때, $0 \leq x \leq 1$ 을 만족하는 방정식 $f(f(x)) = \frac{1}{2}$ 의 실근의 개수는?



- ① 1 개
- ② 2 개
- ③ 3 개
- ④ 4 개
- ⑤ 5 개

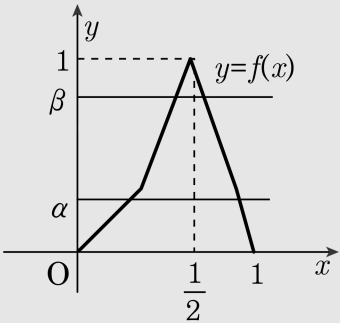
해설



$f(x) = t$ 라 하면

$$f(f(x)) = \frac{1}{2} \Leftrightarrow f(t) = \frac{1}{2} \Leftrightarrow t = \alpha, \beta$$

$$\left(0 < \alpha < \frac{1}{2}, \frac{1}{2} < \beta < 1\right)$$



i) $t = \alpha$ 일 때, $f(x) = \alpha$ 를 만족하는 x 는 두 개

ii) $t = \beta$ 일 때, $f(x) = \beta$ 를 만족하는 x 는

두 개 방정식 $f(f(x)) = \frac{1}{2}$ 의 실근의 개수는 4개이다.

