1. 은정이는 5회에 걸친 사회 시험에서 4회까지 83점, 84점, 79점, 90점을 받았고, 5회는 병결로 인해 4회까지의 평균 성적의 50%를 받았다. 은정이의 5회에 걸친 사회시험 성적의 평균은?

① 72점　② 73.2점　③ 75.6점
④ 77.8점　⑤ 82점

해설

4회 까지의 평균 : $\dfrac{83+84+79+90}{4}=\dfrac{336}{4}=84(\text{점})$

5회 성적 : $84\times\dfrac{50}{100}=42(\text{점})$

(5회에 걸친 사회 성적의 평균)

$=\dfrac{83+84+79+90+42}{5}=\dfrac{378}{5}=75.6(\text{점})$

2. x, y, z 의 평균이 5 이고 분산이 2 일 때, 세 수 x^2, y^2, z^2 의 평균은?

① 20 ② 23 ③ 24 ④ 26 ⑤ 27

해설

세 수 x, y, z 의 평균이 8 이므로

$$\frac{x+y+z}{3} = 5$$

$\therefore x + y + z = 15 \cdots$ ㉠

또, 분산이 2 이므로 $\dfrac{(x-5)^2 + (y-5)^2 + (z-5)^2}{3} = 2$

$(x-5)^2 + (y-5)^2 + (z-5)^2 = 6$

$\therefore x^2 + y^2 + z^2 - 10(x+y+z) + 75 = 6$

위 식에 ㉠을 대입하면

$x^2 + y^2 + z^2 - 10(15) + 75 = 6$

$x^2 + y^2 + z^2 = 81$

따라서 $x^2 + y^2 + z^2$ 의 평균은 $\dfrac{81}{3} = 27$ 이다.

3. 다음 표는 S 중학교 5 개의 학급에 대한 학생들의 미술 실기 점수의 평균과 표준편차를 나타낸 것이다. 다음 설명 중 옳지 않은 것은? (단, 각 학급의 학생 수는 모두 같다.)

학급	A	B	C	D	E
평균(점)	77	77	73	70	82
표준편차	2.2	$2\sqrt{2}$	$\frac{\sqrt{10}}{2}$	$\sqrt{4.5}$	$\sqrt{5}$

① A 학급의 학생의 성적이 B 학급의 학생의 성적보다 더 고른 편이다.

② 고득점자는 A 학급보다 B 학급이 더 많다.

③ B 의 표준편차가 A 의 표준편차보다 크므로 변량이 평균주위에 더 집중되는 것은 B 이다.

④ 가장 성적이 고른 학급은 C 학급이다.

⑤ D 학급의 학생의 성적이 평균적으로 A 학급의 학생의 성적보다 낮은 편이다.

해설

표준편차를 근호를 이용하여 나타내면 다음과 같다.

학급	A	B	C	D	E
표준편차	$2.2 = \sqrt{4.84}$	$2\sqrt{2} = \sqrt{8}$	$\frac{\sqrt{10}}{2} = \sqrt{\frac{10}{4}} = \sqrt{2.5}$	$\sqrt{4.5}$	$\sqrt{5}$

③ 표준편차가 작을수록 변량이 평균 주위에 더 집중된다. 따라서 변량이 평균주위에 더 집중되는 것은 A 이다.

4. 다음 표는 5 개의 학급 A, B, C, D, E에 대한 학생들의 수학 점수의 평균과 표준편차를 나타낸 것이다. 다음 설명 중 옳은 것을 모두 고르면? (단, 각 학급의 학생 수는 모두 같다.)

학급	A	B	C	D	E
평균(점)	67	77	73	67	82
표준편차	2.1	$\sqrt{2}$	$\frac{\sqrt{10}}{3}$	$\sqrt{4.4}$	$\sqrt{3}$

① A 학급의 학생의 성적이 B 학급의 학생의 성적보다 더 고른 편이다.

② B 학급의 학생의 성적이 D 학급의 학생의 성적보다 더 고른 편이다.

③ 중위권 성적의 학생은 A 학급보다 C 학급이 더 많다.

④ 가장 성적이 고른 학급은 E 학급이다.

⑤ D 학급의 학생의 성적이 평균적으로 C 학급의 학생의 성적보다 높은 편이다.

해설

표준편차를 근호를 이용하여 나타내면 다음과 같다.

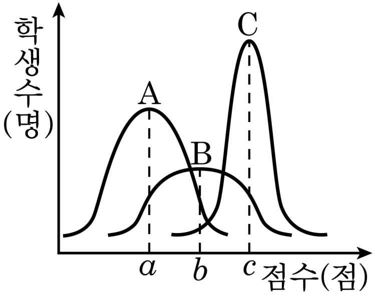
학급	A	B	C	D	E
표준편차	$2.1 = \sqrt{4.41}$	$\sqrt{2}$	$\frac{\sqrt{10}}{3} = \sqrt{\frac{10}{9}} = \sqrt{1.1}$	$\sqrt{4.4}$	$\sqrt{3}$

① B 학급의 학생의 성적이 A 학급의 학생의 성적보다 더 고른 편이다.

④ 가장 성적이 고른 학급은 C 학급이다.

⑤ C 학급의 학생의 성적이 평균적으로 D 학급의 학생의 성적보다 높은 편이다.

5. 다음 그림은 A, B, C 세 학급의 수학 성적을 나타낸 그래프이다. 다음 설명 중 옳지 <u>않은</u> 것은?



① B반 성적은 A반 성적보다 평균적으로 높다.

② 그래프에서 가장 많이 분포되어 있는 곳이 평균이다.

③ C반 성적이 가장 고르다.

④ 평균 주위에 가장 밀집된 반은 A반이다.

⑤ B반보다 A반의 성적이 고르다.

해설

평균 주위에 가장 밀집된 반은 C반이므로 C반 성적이 가장 고르다.

6. 지호네 반 학생 40명의 몸무게의 평균은 60 kg이다. 두명의 학생이 전학을 간 후 나머지 38명의 몸무게의 평균이 59.5 kg이 되었을 때, 전학을 간 두 학생의 몸무게의 평균은?

① 62.5 kg ② 65.5 kg ③ 67 kg

④ 69 kg ⑤ 69.5 kg

해설

40명의 몸무게의 총합 : $60 \times 40 = 2400(\text{kg})$

전학생 2명을 뺀 38명의 몸무게의 총합 : $59.5 \times 38 = 2261(\text{kg})$

전학생 2명의 몸무게의 총합 : $2400 - 2261 = 139(\text{kg})$

$\therefore$ (전학생 2명의 몸무게의 평균)$= \dfrac{139}{2} = 69.5(\text{kg})$

7. 네 개의 변량 $4,\ 6,\ a,\ b$ 의 평균이 5 이고, 분산이 3 일 때, $7,\ a^2,\ b^2,\ 9$ 의 평균은?

① 16 ② 17 ③ 19 ④ 21 ⑤ 23

해설

변량 $4,\ 6,\ a,\ b$ 의 평균이 5 이므로

$$\frac{4+6+a+b}{4}=5,\quad a+b+10=20$$

$\therefore a+b=10 \quad \cdots\cdots ㉠$

또한, 분산이 3 이므로

$$\frac{(4-5)^2+(6-5)^2+(a-5)^2+(b-5)^2}{4}=3$$

$$\frac{1+1+a^2-10a+25+b^2-10b+25}{4}=3$$

$$\frac{a^2+b^2-10(a+b)+52}{4}=3$$

$a^2+b^2-10(a+b)+52=12$

$\therefore\ a^2+b^2-10(a+b)=-40 \quad \cdots\cdots ㉡$

㉡의 식에 ㉠을 대입하면

$\therefore\ a^2+b^2=10(a+b)-40=10\times10-40=60$

따라서 $7,\ a^2,\ b^2,\ 9$ 의 평균은

$$\frac{7+a^2+b^2+9}{4}=\frac{16+60}{4}=19$$ 이다.

8. 네 수 $5,\ 7,\ x,\ y$ 의 평균이 4 이고, 분산이 3 일 때, $5,\ 2x^2,\ 2y^2,\ 7$ 의 평균은?

① 2 ② 4 ③ 6 ④ 8 ⑤ 10

해설

변량 $5,\ 7,\ x,\ y$ 의 평균이 4 이므로

$$\frac{5+7+x+y}{4}=4,\quad x+y+12=16$$

$\therefore x+y=4 \quad \cdots\cdots ㉠$

또한, 분산이 3 이므로

$$\frac{(5-4)^2+(7-4)^2+(x-4)^2+(y-4)^2}{4}=3,$$

$$\frac{1+9+x^2-8x+16+y^2-8y+16}{4}=3,$$

$$\frac{x^2+y^2-8(x+y)+42}{4}=3$$

$x^2+y^2-8(x+y)+42=12$

$\therefore\ x^2+y^2-8(x+y)=-30 \quad \cdots\cdots ㉡$

㉡의 식에 ㉠을 대입하면

$\therefore\ x^2+y^2=8(x+y)-30=8\times4-30=2$

따라서 $5,\ 2x^2,\ 2y^2,\ 7$ 의 평균은

$$\frac{5+2x^2+2y^2+7}{4}=\frac{12+2(x^2+y^2)}{4}=\frac{12+4}{4}=4 \text{ 이다.}$$

9. 세 수 x, y, z 의 평균과 분산이 각각 5, 3 일 때, $\frac{1}{2}x^2$, $\frac{1}{2}y^2$, $\frac{1}{2}z^2$ 의 평균은?

① 12 ② 14 ③ 16 ④ 18 ⑤ 20

해설

세 수 x, y, z 의 평균이 5 이므로

$$\frac{x+y+z}{3}=5$$

$\therefore x+y+z=15 \cdots\cdots$ ㉠

또한, x, y, z 의 분산이 3 이므로

$$\frac{(x-5)^2+(y-5)^2+(z-5)^2}{3}=3$$

$$(x-5)^2+(y-5)^2+(z-5)^2=9$$

$$x^2-10x+25+y^2-10y+25+z^2-10z+25=9$$

$$x^2+y^2+z^2-10(x+y+z)+75=9$$

위의 식에 ㉠을 대입하면

$$x^2+y^2+z^2-10\times 15+75=9$$

$\therefore x^2+y^2+z^2=84$

따라서 $\frac{1}{2}x^2$, $\frac{1}{2}y^2$, $\frac{1}{2}z^2$ 의 평균은

$\frac{1}{3}\left(\frac{x^2}{2}+\frac{y^2}{2}+\frac{z^2}{2}\right)=\frac{1}{6}(x^2+y^2+z^2)=\frac{84}{6}=14$ 이다.

10. 세 수 x, y, z 의 평균과 분산이 각각 3, 4 일 때, $x-1$, $y-1$, $z-1$ 의 평균과 표준편차를 차례대로 구하여라.

① 2, 2 ② 3, 5 ③ 4, 4 ④ 5, 4 ⑤ 6, 5

해설

세 수 x, y, z 의 평균이 3 이므로

$$\frac{x+y+z}{3}=3$$

$$\therefore x+y+z=9 \quad \cdots\cdots ㉠$$

또한, x, y, z 의 분산이 4 이므로

$$\frac{(x-3)^2+(y-3)^2+(z-3)^2}{3}=4$$

$$(x-3)^2+(y-3)^2+(z-3)^2=12$$

$$x^2-6x+9+y^2-6y+9+z^2-6z+9=12$$

$$x^2+y^2+z^2-6(x+y+z)+27=12$$

위의 식에 ㉠을 대입하면

$$x^2+y^2+z^2-6\times 9+27=12$$

$$\therefore x^2+y^2+z^2=39$$

한편, $x-1$, $y-1$, $z-1$ 의 평균은

$$\frac{(x-1)+(y-1)+(z-1)}{3}$$

$$=\frac{(x+y+z)-3}{3}=\frac{9-3}{3}=2$$

분산은

$$\frac{(x-1-2)^2+(y-1-2)^2+(z-1-2)^2}{3}$$

$$=\frac{(x-3)^2+(y-3)^2+(z-3)^2}{3}$$

$$=\frac{x^2+y^2+z^2-6(x+y+z)+9\times 3}{3}$$

$$=\frac{39-6\times 9+27}{3}=\frac{12}{3}=4$$

따라서 $x-1$, $y-1$, $z-1$ 의 표준편차는 $\sqrt{4}=2$ 이다.

11. 변량 $x_1, x_2, + \cdots + x_n$ 의 평균이 4 이고 표준편차가 3 일 때, 변량 $3x_1 - 5, 3x_2 - 5, \cdots, 3x_n - 5$ 의 평균 m과 표준편차 n의 합 $m + n$을 구하면?

① 10 ② 12 ③ 14 ④ 16 ⑤ 18

해설

$$\frac{x_1, x_2, + \cdots + x_n}{n} = 4$$

$$\frac{(3x_1 - 5) + (3x_2 - 5) + \cdots + (3x_n - 5) +}{n}$$

$$= \frac{3(x_1 + x_2 + \cdots + x_n) - 5n}{n}$$

$$= 3 \cdot 4 - 5 = 12 - 5 = 7 = m$$

$$\frac{(x_1 - 4)^2 + (x_2 - 4)^2 + \cdots + (x_n - 4)^2}{n} = 3^2 = 9$$ 일 때,

$$\frac{(3x_1 - 5 - 7)^2 + (3x_2 - 5 - 7)^2}{n}$$

$$+ \frac{+ \cdots + (3x_n - 5 - 7)^2}{n}$$

$$= \frac{\{3(x_1 - 4)^2\} + \{3(x_2 - 4)^2\} + \cdots + \{3(x_n - 4)^2\}}{n}$$

$$= \frac{9\{(x_1 - 4)^2 + (x_2 - 4)^2 + \cdots + (x_n - 4)^2\}}{n}$$

$$= 9 \cdot 9 = 81$$

따라서 표준편차 $n = \sqrt{81} = 9$이다.

따라서 $m + n = 7 + 9 = 16$이다.

12. 세 수 x, y, z 의 평균과 분산이 각각 4, 2 일 때, $3x$, $3y$, $3z$ 의 분산은?

① 14　② 16　③ 18　④ 20　⑤ 22

해설

세 수 x, y, z 의 평균이 4 이므로

$$\frac{x+y+z}{3}=4$$

$\therefore\ x+y+z=12 \quad \cdots\cdots ㉠$

또한, x, y, z 의 분산이 2 이므로

$$\frac{(x-4)^2+(y-4)^2+(z-4)^2}{3}=2$$

$(x-4)^2+(y-4)^2+(z-4)^2=6$

$x^2-8x+16+y^2-8y+16+z^2-8z+16=6$

$x^2+y^2+z^2-8(x+y+z)+48=6$

위의 식에 ㉠을 대입하면

$x^2+y^2+z^2-8\times12+48=6$

$\therefore x^2+y^2+z^2=54$

한편, $3x$, $3y$, $3z$ 의 평균은

$$\frac{3x+3y+3z}{3}=\frac{3(x+y+z)}{3}=\frac{3\times12}{3}=12$$

따라서 분산은

$$\frac{(3x-12)^2+(3y-12)^2+(3z-12)^2}{3}$$

$$=\frac{9x^2+9y^2+9z^2-72(x+y+z)+144\times3}{3}$$

$$=\frac{9\times54-72\times12+432}{3}=\frac{54}{3}$$

$=18$

13. 세 수 $a,\ b,\ c$ 의 평균이 2 , 분산이 4 일 때, 변량 $a+3,\ b+3,\ c+3$ 의 평균과 분산을 차례대로 나열한 것은?

① 2, 5　　② 3, 5　　③ 4, 4　　④ 5, 4　　⑤ 6, 5

해설

세 수 $a,\ b,\ c$ 의 평균이 2 이므로

$$\frac{a+b+c}{3}=2$$

$\therefore a+b+c=6 \ \cdots\cdots ㉠$

또한, $a,\ b,\ c$ 의 분산이 4 이므로

$$\frac{(a-2)^2+(b-2)^2+(c-2)^2}{3}=4$$

$$(a-2)^2+(b-2)^2+(c-2)^2=12$$

$$a^2-4a+4+b^2-4b+4+c^2-4c+4=12$$

$$a^2+b^2+c^2-4(a+b+c)+12=12$$

위의 식에 ㉠을 대입하면

$$a^2+b^2+c^2-4\times 6+12=12$$

$\therefore a^2+b^2+c^2=24$

한편, $a+3,\ b+3,\ c+3$ 의 평균은

$$\frac{(a+3)+(b+3)+(c+3)}{3}=\frac{(a+b+c)+9}{3}$$

$$=\frac{6+9}{3}=5$$

따라서 분산은

$$\frac{(a+3-5)^2+(b+3-5)^2+(c+3-5)^2}{3}$$

$$=\frac{(a-2)^2+(b-2)^2+(c-2)^2}{3}$$

$$=\frac{a^2+b^2+c^2-4(a+b+c)+4\times 3}{3}$$

$$=\frac{24-4\times 6+12}{3}=\frac{12}{3}=4$$

14. 세 개의 변량 a, b, c 의 평균을 M , 표준편차를 S 라고 할 때, $a+1$, $b+1$, $c+1$ 의 평균과 분산을 차례대로 나열한 것은?

① M, S^2
② M, S^2+1
③ $M+1$, S^2
④ $M+1$, S^2+1
⑤ $M+1$, $(S+1)^2$

해설

세 개의 변량 a, b, c 의 평균과 분산이 각각 M , S^2 이므로

$$M=\frac{a+b+c}{3}$$

$$S^2=\frac{(a-M)^2+(b-M)^2+(c-M)^2}{3}$$

$a+1$, $b+1$, $c+1$ 의 평균을 M_1 과 분산을 S_1^2 이라고 하면

$$M_1=\frac{(a+1)+(b+1)+(c+1)}{3}$$

$$=\frac{(a+b+c)+3}{3}=\frac{a+b+c}{3}+1=M+1$$

$$S_1^2=\frac{1}{3}\{(a+1-M-1)^2+(b+1-M-1)^2+(c+1-M-1)^2\}$$

$$=\frac{1}{3}\{(a-M)^2+(b-M)^2+(c-M)^2\}=S^2$$

따라서 $a+1$, $b+1$, $c+1$ 의 평균과 분산은 각각 $M+1$, S^2 이다.

15. 자연수 a, b, c에 대하여 가로의 길이, 세로의 길이, 높이가 각각 $\sqrt{a}$, $\sqrt{b}$, $\sqrt{c}$ 인 직육면체의 부피가 $6\sqrt{5}$일 때, 이 직육면체의 겉넓이의 최댓값을 구하여라. (단, $a \le b \le c$)

① $1+2\sqrt{5}$ ② $2+\sqrt{3}$ ③ $2+12\sqrt{3}$

④ $2+21\sqrt{5}$ ⑤ $2+24\sqrt{5}$

해설

부피는 $\sqrt{abc}=6\sqrt{5}=\sqrt{180}$

$\therefore\ abc=180=2^2\times3^2\times5$

한편 직육면체의 겉넓이는

$2(\sqrt{ab}+\sqrt{bc}+\sqrt{ca})$이고

$\sqrt{ab}+\sqrt{bc}+\sqrt{ca}$가 최댓값을 갖기 위한 자연수 a, b, c의 순서쌍은 $(1,\ 1,\ 180)$ 이므로

$$
\begin{aligned}
\therefore (\text{직육면체의 겉넓이}) &= 2(\sqrt{ab}+\sqrt{bc}+\sqrt{ca}) \\
&= 2(1+\sqrt{180}+\sqrt{180}) \\
&= 2(1+6\sqrt{5}+6\sqrt{5}) \\
&= 2(1+12\sqrt{5}) \\
&= 2+24\sqrt{5}
\end{aligned}
$$