1. $x = \dfrac{\sqrt{5}-1}{2}$ 일 때, $1 + \dfrac{1}{1+\dfrac{1}{1+\dfrac{1}{1+x}}}$ 의 값은?

① $\dfrac{\sqrt{5}+1}{2}$ ② $\dfrac{\sqrt{5}-1}{2}$ ③ 0

④ $\dfrac{\sqrt{5}-3}{2}$ ⑤ $\dfrac{\sqrt{5}+3}{2}$

해설

$$1 + \dfrac{1}{1+\dfrac{1}{1+\dfrac{1}{1+x}}} = 1 + \dfrac{1}{1+\dfrac{1}{\dfrac{x+2}{x+1}}}$$

$$= 1 + \dfrac{1}{1+\dfrac{x+1}{x+2}}$$

$$= 1 + \dfrac{1}{\dfrac{2x+3}{x+2}} = 1 + \dfrac{x+2}{2x+3}$$

$x = \dfrac{\sqrt{5}-1}{2}$ 을 대입하면

$$1 + \dfrac{x+2}{2x+3} = \dfrac{\sqrt{5}+1}{2}$$

2. 분수함수 $f(x)=\dfrac{3}{ax-4}+1$에 대해서 $(f\circ f)(x)=x$가 성립할 때, 상수 a의 값은?

① -5　② -3　③ -2　④ 4　⑤ 5

해설

$(f\circ f)(x)=x$이려면 $f(x)=f^{-1}(x)$ 이어야 한다.
먼저 $f^{-1}(x)$ 를 구해보면,

$y=\dfrac{3}{ax-4}+1$

$\Rightarrow x=\dfrac{3}{a(y-1)}+\dfrac{4}{a}$

$\Rightarrow y=\dfrac{3}{a(x-1)}+\dfrac{4}{a}\cdots\cdots f^{-1}(x)$

$\therefore f(x)=f^{-1}(x)$이려면 $a=4$

3. 10000 원짜리 지폐 2 장, 5000 원짜리 지폐 2 장, 1000 원짜리 지폐 3 장이 있다. 이 지폐의 일부 또는 전부를 사용하여 지불할 수 있는 금액의 수는?

① 27 ② 35 ③ 42 ④ 60 ⑤ 81

해설

5000 원짜리 2 장으로 지불할 수 있는 방법이 10000 원짜리 지폐 1 장으로 지불할 수 있는 방법과 같으므로 10000 원짜리 지폐 2 장을 5000 원짜리 지폐 4 장으로 바꾸면, 5000 원짜리 지폐 6 장, 1000 원짜리 지폐 3 장으로 지불할 수 있는 방법과 같다.

$\therefore 7 \times 4 - 1 = 27$

4. $POWER$의 5개의 문자를 일렬로 배열할 때, P와 R가 이웃하는 경우의 수는?

① 36 ② 48 ③ 56 ④ 70 ⑤ 84

해설

P와 R을 하나로 보면 4개를 일렬로 배열하는 방법과 같다.

$\Rightarrow 4! = 24$

여기에 P와 R가 자리를 바꾸는 방법을 곱한다.

$\therefore 24 \times 2 = 48$

5. 5 개의 숫자 $0, 1, 2, 3, 4$ 중에서 서로 다른 세 개의 숫자를 써서 세 자리 정수를 만들 때,9 의 배수의 개수는?

① 6 ② 12 ③ 15 ④ 18 ⑤ 24

해설

각 자리수의 합이 9 의 배수일 때 그 수는 9 의 배수가 된다. $0, 1, 2, 3, 4$ 에서 각 자리수의 합이 9 의 배수가 되는 조합은 $(2, 3, 4)$ 뿐이다. $2, 3, 4$ 를 써서 만들 수 있는 3 자리 정수는 $3! = 6$

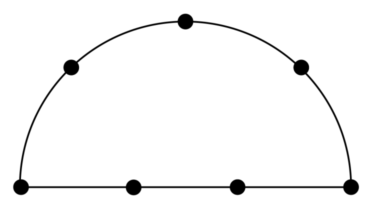
6. 여섯 개의 숫자 0, 1, 2, 3, 4, 5 중 서로 다른 세 개의 숫자를 써서 만들 수 있는 세 자리의 정수는 몇 개인가?

① 60 ② 80 ③ 100 ④ 125 ⑤ 180

해설

백의 자리 : 0 을 제외한 5 개 숫자를 모두 사용가
십의 자리 : 백의 자리에 사용한 수를 제외한 5 개
일의 자리 : 백의 자리, 십의 자리에 사용한 수 2 개를 제외한 4 개
$\therefore 5 \times 5 \times 4 = 100$

7. 다음 그림과 같이 반원 위에 7 개의 점이 있다. 이 중 세 점을 꼭짓점으로 하는 삼각형의 개수는?



① 27 개 ② 28 개 ③ 31 개 ④ 32 개 ⑤ 34 개

해설

전체에서 점 3 개를 고르는 경우에서 밑변 (일직선) 위의 점 중에 3 개를 고르는 경우를 제한다.

${}_7C_3 - {}_4C_3 = 31$

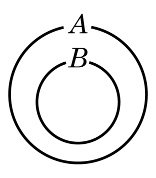
8. 두 집합 X, Y 에 대하여 기호 $\bigotimes$ 를 $X \bigotimes Y = \{x \times y | x \in X$ 그리고 $y \in Y\}$ 라고 약속한다.
$A = \{0, 1, 2\}$, $B = \{1, 2\}$ 일 때, $A \bigotimes B$ 를 구하면?

① $\{0, 1, 2, 4\}$　② $\{0, 1, 2\}$　③ $\{0, 1\}$
④ $\{0\}$　⑤ $\{1, 2\}$

해설

$A \bigotimes B$
$= \{0 \times 1, 0 \times 2, 1 \times 1, 1 \times 2, 2 \times 1, 2 \times 2\}$
$= \{0, 1, 2, 4\}$

9. 두 집합 A, B 사이의 관계가 다음 벤 다이어그램과 같고, 집합 $A = \{x \mid x\text{는 } 2\text{의 배수}\}$, $B = \{x \mid x\text{는 } \boxed{} \text{의 배수}\}$ 일 때, $\boxed{}$ 안에 들어갈 수 있는 수를 모두 고르면?



① 2 ② 3 ③ 4 ④ 5 ⑤ 7

해설

$A = \{2,\ 4,\ 6,\ 8,\ 10,\ 12, \cdots\}$

$\{4,\ 8,\ 12, \cdots\} \subset A$

$\{8,\ 16,\ 24, \cdots\} \subset A$

$\{10,\ 20,\ 30, \cdots\} \subset A$

따라서 ①, ③이다.

10. 두 집합 $A=\{1,\ 2,\ 4,\ 8\}$, $B=\{2,\ 4,\ 6\}$ 일 때, $A \cap X = X$, $(A \cap B) \cup X = X$ 를 만족하는 집합 X 의 개수는?

① 2 개　② 4 개　③ 8 개　④ 16 개　⑤ 32 개

해설

$A \cap X = X$이므로 $X \subset A$
$(A \cap B) \cup X = X$이므로 $(A \cap B) \subset X$
$\therefore (A \cap B) \subset X \subset A$

$(A \cap B) = \{2,\ 4\}$ 이므로 x는 원소 2, 4 를 반드시 포함하는 집합 A 의 부분집합이다.
$\therefore 2^{4-2} = 2^2 = 4$

11. 두 집합 A, B가 다음과 같을 때, $X \cap A = X$, $X \cup (A \cap B) = X$를 만족하는 집합 X의 개수는?

$A = \{x \mid x$는 5 이하의 자연수$\}$, $B = \{3,\ 5,\ 7\}$

① 2개　② 4개　③ 6개　④ 8개　⑤ 10개

해설

$A = \{1,\ 2,\ 3,\ 4,\ 5\}$, $A \cap B = \{3, 5\}$, $X \cap A = X$이므로 $X \subset A$

$X \cup (A \cap B) = X$이므로 $A \cap B \subset X$

$\{3,\ 5\} \subset X \subset \{1,\ 2,\ 3,\ 4,\ 5\}$

따라서 집합 X는 집합 A 의 부분집합 중 원소 3, 5를 반드시 포함하는 집합이므로

$2^{5-2} = 2^3 = 8$(개)

12. 다음은 명제 '정수 x, y, z에 대하여 $x^2+y^2=z^2$ 이면 x, y, z 중 적어도 하나는 3의 배수이다.' 가 참임을 대우를 이용하여 증명한 것이다. (가) ~ (마)에 들어갈 말로 <u>틀린</u> 것은?

> 주어진 명제의 대우인 '정수 x, y, z에 대하여 x, y, z 가 모두 3의 배수가 아니면 (가) 이다.' 가 참임을 증명해 보자.
> x, y, z 가 모두 3의 배수가 아니면,
> x, y, z 는 각각 $x=3l\pm1$, $y=3m\pm1$, $z=3n\pm1$ (l, m, n 은 정수)로 나타낼 수 있다.
> 이때,
> $$\begin{aligned} x^2+y^2 &= (3l\pm1)^2+(3m\pm1)^2 \\ &= 9l^2\pm6l+1+9m^2\pm6m+1 \\ &= 9(l^2+m^2)\pm6(l+m)+2 \end{aligned}$$
> 또는
> $$\begin{aligned} x^2+y^2 &= (\text{나}) \\ &= (\text{다}) \\ &= 9(l^2+m^2)\pm6(l-m)+2 \end{aligned}$$
> 한편,
> $z^2=(3n\pm1)^2=9n^2\pm6n+1$
> 따라서, $x^2+y^2\neq z^2$ 이므로 주어진 명제의 대우는 (라) 이다.
> 그러므로 주어진 명제 '$x^2+y^2=z^2$ 이면 x, y, z 중 적어도 하나는 3의 배수이다.' 는 (마) 이다.

① (가) $x^2+y^2\neq z^2$

② (나) $(3l\pm1)^2+(3m\pm1)^2$

③ (다) $9l^2\pm6l+1+9m^2\mp6m+1$

④ (라) 참

⑤ (마) 참

해설

x^2+y^2 는 $(3l\pm1)^2+(3m\pm1)^2$ 또는 $(3l\pm1)^2+(3m\mp1)^2$

13. 자연수 전체의 집합에서 정의된 함수 $f(x)$ 가 다음 두 조건을 만족시킬 때, $f(1280)$ 의 값은 얼마인가?

(i) $f(2x) = f(x)\ (x = 1, 2, 3, ...)$
(ii) $f(2x+1) = 2^x\ (x = 0, 1, 2, 3, \cdots)$

① 2 ② 4 ③ 8 ④ 16 ⑤ 32

해설

$1280 = 2^8 \cdot 5$ 이므로,

$$f(2^8 \cdot 5) = f(2^7 \cdot 5) = f(2^6 \cdot 5) = \cdots = f(5)$$
$$= f(2 \cdot 2 + 1)$$ 이므로,

$$f(2 \cdot 2 + 1) = 2^2 = 4$$

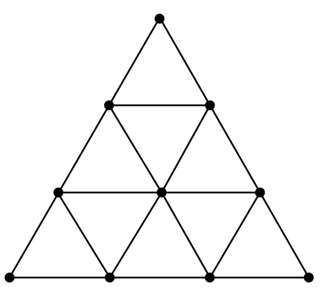
14. 함수 $y = a\,|\,x+1\,|\,-b\,|\,x-1\,|\,+2$ 의 그래프가 y축에 대하여 대칭이기 위한 필요충분조건을 구하면?

① $a+b=0$ ② $a-b=0$ ③ $a+b=1$
④ $a-b=1$ ⑤ $a+b=2$

해설

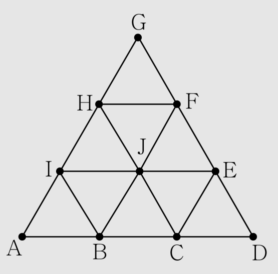
$y=f(x)$ 의 그래프가 y축에 대하여 대칭이면 $f(x)=f(-x)$ 이다.
$f(x)=a\,|\,x+1\,|\,-b\,|\,x-1\,|\,+2$ 라 하면
$f(-x)=a\,|\,-x+1\,|\,-b\,|\,-x-1\,|\,+2$
$=-b\,|\,x+1\,|\,+a\,|\,x-1\,|\,+2$
$f(x)=f(-x)$ 에서 $a=-b$
$\therefore\ a+b=0$

15. 다음 그림과 같은 형태의 정삼각형들의 꼭짓점으로 이루어진 10 개의 점이 있다. 이들 점을 연결하여 만들 수 있는 직선의 개수는?



① 12 개 ② 14 개 ③ 18 개 ④ 20 개 ⑤ 24 개

해설



서로 다른 10 개의 점 중에서 두 점을 택하면
직선이 되므로, ${}_{10}C_2 = 45$, 그런데 위 그림에서
네 점 A, B, C, D 중 어떤 두 점을 택하여
직선을 그려도 모두 동일한 직선이 된다.
A, B, C, D 네 점 중 두 점을 택하는 경우의
수 ${}_4C_2 = 6$ 가지와 I, J, E 세 점 중 두 점을 택하는 경우의 수
${}_3C_2 = 3$ 가지가 각각 동일한 직선이 된다.
다른 두 방향에 대해서도 동일하므로 한 직선이 중복되어 계산된
경우의 수는 $({}_4C_2 +{}_3 C_2 - 2) \times 3 = 21$(가지) 이다.
따라서 구하는 직선의 수는 $45 - 21 = 24$(개)