

1. $f(x) = \frac{1}{x}$, $g(x) = \frac{1}{x+1}$ 일 때, $f(1)g(1) + f(2)g(2) + f(3)g(3) + \cdots + f(49)g(49)$ 의 값을 구하면?

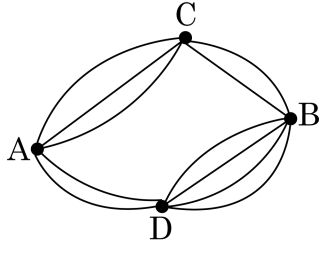
- ① $\frac{48}{49}$ ② $\frac{50}{49}$ ③ $\frac{51}{49}$ ④ $\frac{49}{50}$ ⑤ $\frac{51}{50}$

해설

$$\begin{aligned} f(x)g(x) &= \frac{1}{x} \times \frac{1}{x+1} \\ &= \frac{1}{(x+1)-x} \left(\frac{1}{x} - \frac{1}{x+1} \right) \\ &= \frac{1}{x} - \frac{1}{x+1} \text{ 이므로} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} (\text{주어진 식}) &= \left(1 - \frac{1}{2} \right) + \left(\frac{1}{2} - \frac{1}{3} \right) + \left(\frac{1}{3} - \frac{1}{4} \right) + \cdots + \left(\frac{1}{49} - \frac{1}{50} \right) = 1 - \frac{1}{50} = \\ &\frac{49}{50} \end{aligned}$$

2. 다음 그림과 같은 도로망이 있다. 갑, 을 두 사람이 A 지점에서 출발하여 B 지점 또는 C 지점을 거쳐 D 지점으로 가는 방법의 수는? (단, 갑과 을은 같은 중간 지점을 지나지 않는다.)



- ① 80 ② 84 ③ 88 ④ 90 ⑤ 96

해설

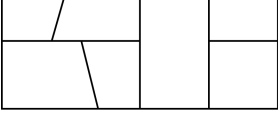
갑과 을은 같은 중간 지점을 지나지 않으므로 갑, 을이 A 지점에서 출발하여 D 지점으로 가는 방법의 수는 다음과 같다.

(i) 갑 : $A \rightarrow B \rightarrow D$ 의 경우 $3 \times 2 = 6$ (가지)
 을 : $A \rightarrow C \rightarrow D$ 의 경우 $2 \times 4 = 8$ (가지)
 갑과 을은 동시에 길을 가므로, 이때 두 사람이 가는 방법의 수는 곱의 법칙에 의하여
 $6 \times 8 = 48$ (가지)

(ii) 갑 : $A \rightarrow C \rightarrow D$ 의 경우 $2 \times 4 = 8$ (가지)
 을 : $A \rightarrow B \rightarrow D$ 의 경우 $3 \times 2 = 6$ (가지)

(i) 에서와 같은 방법으로 $6 \times 8 = 48$ (가지)
 (i), (ii)는 동시에 일어날 수 없으므로 구하는 방법의 수는 합의 법칙에 의하여
 $48 + 48 = 96$ (가지)

3. 빨강, 주황, 노랑, 초록, 파랑의 5 가지 색을 사용하여 다음 그림과 같은 도형의 각 면을 색칠하려고 한다. 변의 일부 또는 전부를 공유하는 두 면은 같은 색을 사용하지 않도록 할 때, 모든 면을 색칠하는 방법의 수는?



- ① 4020 ② 5160 ③ 6480 ④ 7260 ⑤ 8400

해설

e / b		f
d \ c	a	g

*a*에 색칠하는 방법의 수는 5 가지
*b*에 색칠하는 방법의 수는 4 가지
*c*에 색칠하는 방법의 수는 3 가지
*d*에 색칠하는 방법의 수는 3 가지
*e*에 색칠하는 방법의 수는 3 가지이므로
*a, b, c, d, e*에 색칠하는 방법의 수는
 $5 \times 4 \times 3 \times 3 \times 3 = 540$ (가지)
*f*에 색칠하는 방법의 수는 4 가지
*g*에 색칠하는 방법의 수는 3 가지 이므로
*f, g*에 색칠하는 방법의 수는 $4 \times 3 = 12$ (가지)
 따라서 구하는 방법의 수는
 $540 \times 12 = 6480$ (가지)

4. ‘worldcup’의 모든 문자를 써서 만든 순열 중 w와 d 사이에 3개의 문자가 들어 있는 것은 몇 개인가?

- ① 3820
- ② 4630
- ③ 5760
- ④ 6740
- ⑤ 7260

해설

Ⓜ○○○○ⓓ○○○

w와 d사이에 나머지 6개 중 3개를 뽑아 채우고 w와 d가 자리를 바꿀 수 있는 경우를 곱한 뒤 5문자를 한 묶음으로 보고 4개를 줄세우는 경우를 구한다.

${}_6P_3 \times 2! \times 4! = 5760$

5. a, b, c, d, e의 5개의 문자를 일렬로 나열할 때, c가 d보다 앞에 오게 되는 방법의 수는?

① 24 ② 30 ③ 60 ④ 72 ⑤ 120

해설

c와 d를 같은 문자로 생각하여 5개의 문자를 나열하는 방법과 같다.

$$\therefore \frac{5!}{2!} = 60$$

6. 0, 1, 2, 3, 4에서 서로 다른 4개의 숫자를 택하여 만들 수 있는 네 자리의 정수 중에서 4의 배수의 개수는?

- ① 12
- ② 18
- ③ 24
- ④ 30
- ⑤ 36

해설

끝의 두자리가 4 의 배수가 되어야 한다.

⇒ 12, 20, 24,

32, 40, 04

각각의 경우를 구해 더한다.

∴ $4 + 6 + 4 + 4 + 6 + 6 = 30$

7. 다음 연립방정식을 만족하는 n 의 값은?

$${}_8C_{r-1} = {}_8C_{3r+1}, {}_nC_r + {}_nC_{r+1} = 2 \cdot {}_{2n}C_{r-1}$$

- ① 4 ② 5 ③ 6 ④ 7 ⑤ 8

해설

${}_8C_{r-1} = {}_8C_{3r+1}$ 에서 $r-1 = 3r+1$
또는 $(r-1) + (3r+1) = 8, r > 0$ 이므로
 $\therefore r = 2$

따라서 두 번째 식에서

$${}_nC_r + {}_nC_{r+1} = 2 \cdot {}_{2n}C_{r-1}$$

$$\frac{n(n-1)}{2} + \frac{n(n-1)(n-2)}{6} = 2 \cdot 2n \cdots (i)$$

$n \geq 3$ 이므로 (i)을 정리하면

$$3(n-1) + (n-1)(n-2) = 24$$

$$\text{따라서 } n^2 - 25 = 0 \therefore n = 5$$

8. $\frac{a}{b+c-a} = \frac{b}{c+a-b} = \frac{c}{a+b-c}$ 의 값들의 합은?

- ① 0 ② $-\frac{1}{2}$ ③ $\frac{1}{2}$ ④ $\frac{2}{3}$ ⑤ -1

해설

(분모의 합)

$$= (b+c-a) + (c+a-b) + (a+b-c) = a+b+c$$

i) $a+b+c \neq 0$ 일 때, 가비의 리를 이용하면

$$\begin{aligned}\frac{a}{b+c-a} &= \frac{b}{c+a-b} = \frac{c}{a+b-c} \\ &= \frac{a+b+c}{a+b+c} = 1\end{aligned}$$

ii) $a+b+c = 0$ 일 때,

$$b+c = -a, \quad c+a = -b, \quad a+b = -c \text{ 이므로}$$

$$\frac{a}{-a-a} = \frac{b}{-b-b} = \frac{c}{-c-c} = -\frac{1}{2}$$

i), ii) 에서 구하는 값은 1 또는 $-\frac{1}{2}$

$\therefore$ 분수식의 값들의 합은 $\frac{1}{2}$

9. 두 지점 A, B를 왕복하는데 A에서 B까지 갈 때에는 시속 a km의 속력으로, B에서 A로 올 때에는 시속 b km의 속력으로 다녀왔다. 다음 중 왕복 평균속력을 나타내는 식을 적은 것은? (단위: km/h)

① $\frac{a+b}{2}$
④ $\frac{\sqrt{a^2+b^2}}{2}$

② $\sqrt{ab}$
⑤ $\frac{1}{a} + \frac{1}{b}$

③ $\frac{2ab}{a+b}$

해설

A에서 B까지의 거리를 l km라 하면

가는데 걸린 시간 : $\frac{l}{a}$

오는데 걸린 시간 : $\frac{l}{b}$

왕복거리 : $2l$

따라서, 왕복평균속력은 $\frac{2l}{\frac{l}{a} + \frac{l}{b}} = \frac{2ab}{a+b}$

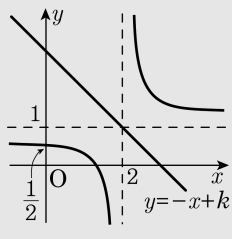
10. 분수함수 $y = \frac{x-1}{x-2}$ 의 그래프가 직선 $y = -x + k$ 에 대하여 대칭일 때, 상수 k 의 값을 구하여라.

- ① -1
- ② 1
- ③ 3
- ④ 5
- ⑤ 7

해설

$$y = \frac{x-1}{x-2}$$
$$= \frac{(x-2)+1}{x-2}$$
$$= \frac{1}{x-2} + 1$$

따라서, 점근선이
 $x = 2, y = 1$ 인 분수함수이므로 그래프는
다음과 같다.
다음 그래프가 직선 $y = -x + k$ 에 대하여
대칭이라면
직선이 두 점근선의 교점인 $(2, 1)$ 을 지나야 하므로
 $1 = -2 + k$
 $\therefore k = 3$



11. 함수 $y = -\frac{2}{x} + 2$ 의 그래프와 직선 $y = 2x + k$ 가 서로 만나지 않을 때, 정수 k 의 개수는?

① 3 개 ② 4 개 ③ 5 개 ④ 6 개 ⑤ 7 개

해설

$-\frac{2}{x} + 2 = 2x + k$ 에서 $-2 + 2x = 2x^2 + kx$
 $2x^2 + (k - 2)x + 2 = 0$ 이 이차방정식의 판별식을
 D 라 하면 $D = (k - 2)^2 - 16 < 0$ 에서
 $k^2 - 4k - 12 < 0, (k + 2)(k - 6) < 0$
 $\therefore -2 < k < 6$
따라서 이를 만족하는 정수 k 의 값은
 $-1, 0, 1, 2, 3, 4, 5$ 의 7개이다.

12. $a > 1$ 이고, $x = \frac{2a}{a^2 + 1}$ 일 때, $\sqrt{1+x} + \sqrt{1-x}$ 를 a 로 나타내면?

- ① $\frac{5a}{\sqrt{a^2+1}}$ ② $\frac{4a}{\sqrt{a^2+1}}$ ③ $\frac{2a}{\sqrt{a^2+1}}$
④ $\frac{a}{\sqrt{a^2+1}}$ ⑤ $\frac{7a}{\sqrt{a^2+1}}$

해설

$$\begin{aligned} x &= \frac{2a}{a^2+1} \text{ 이므로} \\ \sqrt{1+\frac{2a}{a^2+1}} + \sqrt{1-\frac{2a}{a^2+1}} \\ &= \sqrt{\frac{(a+1)^2}{a^2+1}} + \sqrt{\frac{(a-1)^2}{a^2+1}} \\ &= \frac{a+1+a-1}{\sqrt{a^2+1}} (\because a > 1) \\ &= \frac{2a}{\sqrt{a^2+1}} \end{aligned}$$

13. $x = \frac{1}{\sqrt{5+2\sqrt{6}}}, y = \frac{1}{\sqrt{5-2\sqrt{6}}}$ 일 때,
 $x^4 + x^2y^2 + y^4 + 1$ 의 값을 구하면?

- ① $2\sqrt{3}$ ② 1 ③ 99 ④ 100 ⑤ 101

해설

$$x = \frac{1}{\sqrt{5+2\sqrt{6}}} = \frac{1}{\sqrt{3} + \sqrt{2}} = \sqrt{3} - \sqrt{2}$$

$$y = \frac{1}{\sqrt{5-2\sqrt{6}}} = \frac{1}{\sqrt{3} - \sqrt{2}} = \sqrt{3} + \sqrt{2}$$

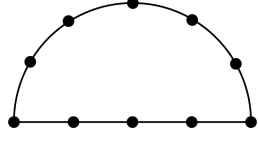
$$x + y = 2\sqrt{3}, xy = 1$$

$$x^2 + y^2 = (x + y)^2 - 2xy = 12 - 2 = 10$$

$$x^4 + y^4 = (x^2 + y^2)^2 - 2x^2y^2 = 100 - 2 = 98$$

$$\therefore x^4 + x^2y^2 + y^4 + 1 = 98 + 1 + 1 = 100$$

14. 다음 그림과 같이 반원 위에 10 개의 점이 있다. 이 중 네 점을 꼭짓점으로 하는 사각형의 개수는?

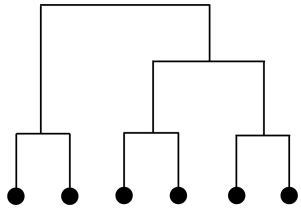


- ① 90 ② 120 ③ 140 ④ 155 ⑤ 160

해설

10 개의 점 중에서 4 개의 점을 택하는
 경우의 수는 ${}_{10}C_4 = 210$
 그중에서 사각형이 되지 않는 경우
 (i) 직선 위의 5 개의 점 중에서 4 개의
 점을 택하는 경우의 수 ${}_5C_4 = {}_5C_1 = 5$
 (ii) 직선 위의 점 중에서 3 개를 택하고
 한 점을 원주 위의 점 중에서 택한 경우
 ${}_5C_3 \times 5 = 50$
 따라서, 구하는 사각형의 수는 $210 - (5 + 50) = 155$

15. 6 개의 학급이 참가한 줄다리기 대회의 대진표가 그림과 같을 때, 대진표를 작성하는 방법의 수는?



- ① 30 ② 45 ③ 55 ④ 60 ⑤ 65

해설

먼저 6 개팀 중 4 개의 팀을 고른다. $\Rightarrow {}_6C_2 = 15$
선택한 4 개의 팀을 각각 두개의 조로 나눈다.

$$\Rightarrow {}_4C_2 \times {}_2C_2 \times \frac{1}{2!} = 3$$

$$\therefore 15 \times 3 = 45$$