1. $f(x)=\frac{1}{x}$, $g(x)=\frac{1}{x+1}$ 일 때, $f(1)g(1)+f(2)g(2)+f(3)g(3)+\cdots+f(49)g(49)$ 의 값을 구하면?

① $\frac{48}{49}$ ② $\frac{50}{49}$ ③ $\frac{51}{49}$ ④ $\frac{49}{50}$ ⑤ $\frac{51}{50}$

해설

$$f(x)g(x)=\frac{1}{x}\times\frac{1}{x+1}$$

$$=\frac{1}{(x+1)-x}\left(\frac{1}{x}-\frac{1}{x+1}\right)$$

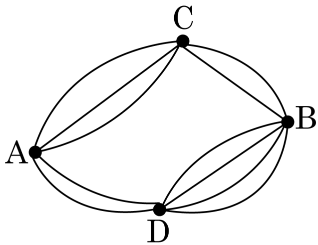
$$=\frac{1}{x}-\frac{1}{x+1}$$ 이므로

(주어진 식) $=$

$\left(1-\frac{1}{2}\right)+\left(\frac{1}{2}-\frac{1}{3}\right)+\left(\frac{1}{3}-\frac{1}{4}\right)+\cdots+\left(\frac{1}{49}-\frac{1}{50}\right)=1-\frac{1}{50}=$

$\frac{49}{50}$

2. 다음 그림과 같은 도로망이 있다. 갑, 을 두 사람이 A 지점에서 출발하여 B 지점 또는 C 지점을 거쳐 D 지점으로 가는 방법의 수는? (단, 갑과 을은 같은 중간 지점을 지나지 않는다.)



① 80 ② 84 ③ 88 ④ 90 ⑤ 96

해설

갑과 을은 같은 중간 지점을 지나지 않으므로 갑, 을이 A 지점에서 출발하여 D 지점으로 가는 방법의 수는 다음과 같다.

(i) 갑 : $A \to B \to D$ 의 경우 $3 \times 2 = 6$ (가지)

을 : $A \to C \to D$ 의 경우 $2 \times 4 = 8$ (가지)

갑과 을은 동시에 길을 가므로, 이때 두 사람이 가는 방법의 수는 곱의 법칙에 의하여

$6 \times 8 = 48$ (가지)

(ii) 갑 : $A \to C \to D$ 의 경우 $2 \times 4 = 8$ (가지)

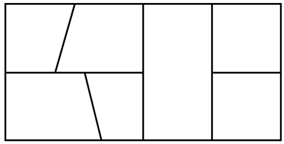
을 : $A \to B \to D$ 의 경우 $3 \times 2 = 6$ (가지)

(i) 에서와 같은 방법으로 $6 \times 8 = 48$ (가지)

(i), (ii)는 동시에 일어날 수 없으므로 구하는 방법의 수는 합의 법칙에 의하여

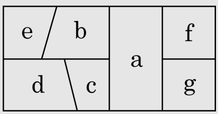
$48 + 48 = 96$ (가지)

3. 빨강, 주황, 노랑, 초록, 파랑의 5 가지 색을 사용하여 다음 그림과 같은 도형의 각 면을 색칠하려고 한다. 변의 일부 또는 전부를 공유하는 두 면은 같은 색을 사용하지 않도록 할 때, 모든 면을 색칠하는 방법의 수는?



① 4020　② 5160　③ 6480　④ 7260　⑤ 8400

해설



a 에 색칠하는 방법의 수는 5 가지
b 에 색칠하는 방법의 수는 4 가지
c 에 색칠하는 방법의 수는 3 가지
d 에 색칠하는 방법의 수는 3 가지
e 에 색칠하는 방법의 수는 3 가지이므로
a, b, c, d, e 에 색칠하는 방법의 수는
$5 \times 4 \times 3 \times 3 \times 3 = 540$ (가지)
f 에 색칠하는 방법의 수는 4 가지
g 에 색칠하는 방법의 수는 3 가지 이므로
f, g 에 색칠하는 방법의 수는 $4 \times 3 = 12$ (가지)
따라서 구하는 방법의 수는
$540 \times 12 = 6480$ (가지)

4. 'worldcup' 의 모든 문자를 써서 만든 순열 중 w와 d 사이에 3개의 문자가 들어 있는 것은 몇 개인가?

① 3820 ② 4630 ③ 5760 ④ 6740 ⑤ 7260

해설

$\boxed{ⓦ○○○ⓓ}$○○○

w와 d사이에 나머지 6개 중 3개를 뽑아 채우고 w와 d가 자리를 바꿀 수 있는 경우를 곱한 뒤 5문자를 한 묶음으로 보고 4개를 줄세우는 경우를 구한다.

${}_6P_3 \times 2! \times 4! = 5760$

5. a, b, c, d, e의 5개의 문자를 일렬로 나열할 때, c가 d보다 앞에 오게 되는 방법의 수는?

① 24　② 30　③ 60　④ 72　⑤ 120

해설

c와 d를 같은 문자로 생각하여 5개의 문자를 나열하는 방법과 같다.

$$\therefore \ \frac{5!}{2!} = 60$$

6. 0, 1, 2, 3, 4에서 서로 다른 4개의 숫자를 택하여 만들 수 있는 네 자리의 정수 중에서 4의 배수의 개수는?

① 12　② 18　③ 24　④ 30　⑤ 36

해설

끝의 두자리가 4 의 배수가 되어야 한다.

$\Rightarrow$ $\square\square$12, $\square\square$20, $\square\square$24,

$\square\square$32, $\square\square$40, $\square\square$04

각각의 경우를 구해 더한다.

$\therefore\ 4+6+4+4+6+6=30$

7. 다음 연립방정식을 만족하는 n의 값은?

$_{8}C_{r-1} = _{8}C_{3r+1}$, $_{n}C_{r} + _{n}C_{r+1} = 2 \cdot _{2n}C_{r-1}$

① 4 ② 5 ③ 6 ④ 7 ⑤ 8

해설

$_{8}C_{r-1} = _{8}C_{3r+1}$ 에서 $r-1 = 3r+1$
또는 $(r-1)+(3r+1)=8$, $r>0$ 이므로
$\therefore\ r=2$
따라서 두 번째 식에서
$_{n}C_{r} + _{n}C_{r+1} = 2 \cdot _{2n}C_{r-1}$

$$\frac{n(n-1)}{2} + \frac{n(n-1)(n-2)}{6} = 2 \cdot 2n \ \cdots \text{(i)}$$

$n \geq 3$ 이므로 (i)을 정리하면
$3(n-1)+(n-1)(n-2)=24$
따라서 $n^2-25=0$ $\therefore\ n=5$

8. $\dfrac{a}{b+c-a}=\dfrac{b}{c+a-b}=\dfrac{c}{a+b-c}$ 의 값들의 합은?

① 0　② $-\dfrac{1}{2}$　③ $\dfrac{1}{2}$　④ $\dfrac{2}{3}$　⑤ -1

해설

(분모의 합)

$=(b+c-a)+(c+a-b)+(a+b-c)=a+b+c$

ⅰ) $a+b+c\neq 0$ 일 때, 가비의 리를 이용하면

$$\frac{a}{b+c-a}=\frac{b}{c+a-b}=\frac{c}{a+b-c}$$

$$=\frac{a+b+c}{a+b+c}=1$$

ⅱ) $a+b+c=0$ 일 때,

$b+c=-a,\ c+a=-b,\ a+b=-c$ 이므로

$$\frac{a}{-a-a}=\frac{b}{-b-b}=\frac{c}{-c-c}=-\frac{1}{2}$$

ⅰ), ⅱ)에서 구하는 값은 1 또는 $-\dfrac{1}{2}$

$\therefore$ 분수식의 값들의 합은 $\dfrac{1}{2}$

9. 두 지점 A, B를 왕복하는데 A에서 B까지 갈 때에는 시속 a km의 속력으로, B에서 A로 올 때에는 시속 b km의 속력으로 다녀왔다. 다음 중 왕복 평균속력을 나타내는 식을 적은 것은? (단위: km/h)

① $\dfrac{a+b}{2}$ ② $\sqrt{ab}$ ③ $\dfrac{2ab}{a+b}$
④ $\dfrac{\sqrt{a^2+b^2}}{2}$ ⑤ $\dfrac{1}{a}+\dfrac{1}{b}$

해설

A에서 B까지의 거리를 l km라 하면

가는데 걸린 시간 : $\dfrac{l}{a}$

오는데 걸린 시간 : $\dfrac{l}{b}$

왕복거리 : $2l$

따라서, 왕복평균속력은 $\dfrac{2l}{\dfrac{l}{a}+\dfrac{l}{b}}=\dfrac{2ab}{a+b}$

10. 분수함수 $y = \dfrac{x-1}{x-2}$의 그래프가 직선 $y = -x + k$에 대하여 대칭일 때, 상수 k의 값을 구하여라.

① -1 ② 1 ③ 3 ④ 5 ⑤ 7

해설

$y = \dfrac{x-1}{x-2}$

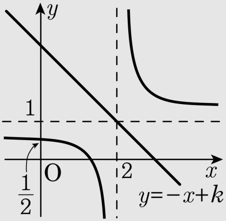
$= \dfrac{(x-2)+1}{x-2}$

$= \dfrac{1}{x-2} + 1$

따라서, 점근선이

$x = 2$, $y = 1$인 분수함수이므로 그래프는

다음과 같다.



다음 그래프가 직선 $y = -x + k$에 대하여

대칭이려면

직선이 두 점근선의 교점인 $(2,\ 1)$을 지나야 하므로

$1 = -2 + k$

$\therefore\ k = 3$

11. 함수 $y = -\frac{2}{x} + 2$의 그래프와 직선 $y = 2x + k$가 서로 만나지 않을 때, 정수 k의 개수는?

① 3 개 ② 4 개 ③ 5 개 ④ 6 개 ⑤ 7 개

해설

$-\frac{2}{x} + 2 = 2x + k$ 에서 $-2 + 2x = 2x^2 + kx$

$2x^2 + (k-2)x + 2 = 0$이 이차방정식의 판별식을

D라 하면 $D = (k-2)^2 - 16 < 0$에서

$k^2 - 4k - 12 < 0,\ (k+2)(k-6) < 0$

$\therefore\ -2 < k < 6$

따라서 이를 만족하는 정수 k의 값은

$-1,\ 0,\ 1,\ 2,\ 3,\ 4,\ 5$의 7개이다.

12. $a>1$이고, $x=\dfrac{2a}{a^2+1}$일 때, $\sqrt{1+x}+\sqrt{1-x}$를 a로 나타내면?

① $\dfrac{5a}{\sqrt{a^2+1}}$ ② $\dfrac{4a}{\sqrt{a^2+1}}$ ③ $\dfrac{2a}{\sqrt{a^2+1}}$
④ $\dfrac{a}{\sqrt{a^2+1}}$ ⑤ $\dfrac{7a}{\sqrt{a^2+1}}$

해설

$x=\dfrac{2a}{a^2+1}$ 이므로

$$\sqrt{1+\frac{2a}{a^2+1}}+\sqrt{1-\frac{2a}{a^2+1}}$$

$$=\sqrt{\frac{(a+1)^2}{a^2+1}}+\sqrt{\frac{(a-1)^2}{a^2+1}}$$

$$=\frac{a+1+a-1}{\sqrt{a^2+1}}(\because a>1)$$

$$=\frac{2a}{\sqrt{a^2+1}}$$

13. $x = \dfrac{1}{\sqrt{5+2\sqrt{6}}}, y = \dfrac{1}{\sqrt{5-2\sqrt{6}}}$ 일 때,

$x^4 + x^2y^2 + y^4 + 1$ 의 값을 구하면?

① $2\sqrt{3}$　② 1　③ 99　④ 100　⑤ 101

해설

$$x = \frac{1}{\sqrt{5+2\sqrt{6}}} = \frac{1}{\sqrt{3}+\sqrt{2}} = \sqrt{3}-\sqrt{2}$$

$$y = \frac{1}{\sqrt{5-2\sqrt{6}}} = \frac{1}{\sqrt{3}-\sqrt{2}} = \sqrt{3}+\sqrt{2}$$

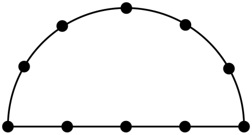
$x+y = 2\sqrt{3}$, $xy = 1$

$x^2+y^2 = (x+y)^2 - 2xy = 12 - 2 = 10$

$x^4+y^4 = (x^2+y^2)^2 - 2x^2y^2 = 100 - 2 = 98$

$\therefore\ x^4 + x^2y^2 + y^4 + 1 = 98 + 1 + 1 = 100$

14. 다음 그림과 같이 반원 위에 10 개의 점이 있다. 이 중 네 점을 꼭짓점으로 하는 사각형의 개수는?

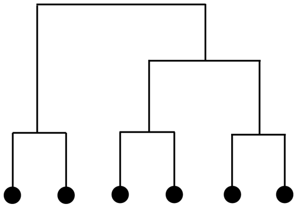


① 90 ② 120 ③ 140 ④ 155 ⑤ 160

해설

10 개의 점 중에서 4 개의 점을 택하는
경우의 수는 ${}_{10}C_4 = 210$
그중에서 사각형이 되지 않는 경우
(i) 직선 위의 5 개의 점 중에서 4 개의
점을 택하는 경우의 수 ${}_5C_4 = {}_5C_1 = 5$
(ii) 직선 위의 점 중에서 3 개를 택하고
한 점을 원주 위의 점 중에서 택한 경우
${}_5C_3 \times 5 = 50$
따라서, 구하는 사각형의 수는 $210 - (5 + 50) = 155$

15. 6 개의 학급이 참가한 줄다리기 대회의 대진표가 그림과 같을 때, 대진표를 작성하는 방법의 수는?



① 30 ② 45 ③ 55 ④ 60 ⑤ 65

해설

먼저 6 개팀 중 4 개의 팀을 고른다. $\Rightarrow {}_6C_2 = 15$

선택한 4 개의 팀을 각각 두개의 조로 나눈다.

$\Rightarrow {}_4C_2 \times {}_2C_2 \times \dfrac{1}{2!} = 3$

$\therefore 15 \times 3 = 45$