1. 삼차방정식 $x^3+x^2+ax+b=0$의 두 근이 -3, $1-\sqrt{2}$일 때, 유리수 a, b의 합 $a+b$의 값은?

① -10　② -5　③ 0　④ 5　⑤ 10

해설

계수가 실수인 삼차방정식의 한 근이 $1-\sqrt{2}$이므로 다른 한 근은 $1+\sqrt{2}$이다.
따라서, 근과 계수의 관계에 의하여
$a=(1-\sqrt{2})\left(1+\sqrt{2}\right)+(-3)\left(1-\sqrt{2}\right)+(-3)\left(1+\sqrt{2}\right)=-7$
$b=-\left(1-\sqrt{2}\right)\left(1+\sqrt{2}\right)(-3)=-3$
$\therefore\ a+b=-10$

2. 등식 $2x^2-3x-1=a(x-1)(x-2)+bx(x-1)+cx(x-2)$이 x에 관한 항등식이 되도록 할 때, $a+b+c$의 값은?

① 0 ② 1 ③ 2 ④ 3 ⑤ 4

해설

수치대입법을 이용한다.

$x=0$ 대입, $a=-\frac{1}{2}$

$x=2$ 대입, $b=\frac{1}{2}$

$x=1$ 대입, $c=2$

$\therefore\ a+b+c=-\frac{1}{2}+\frac{1}{2}+2=2$

3. 다항식 $f(x)$를 $x-1$, $x+1$로 나누었을 때의 나머지를 각각 m, n이라 하자. 이 때 $f(x)$를$(x+1)(x-1)$로 나누었을 때의 나머지를 $R(x)$를 m과 n이 포함된 식으로 나타내면?

① $R(x) = (m-n)x + (m+n)$

② $R(x) = (m+n)x + (m-n)$

③ $R(x) = (m-n)x - (m+n)$

④ $R(x) = \frac{m-n}{2}x + \frac{m+n}{2}$

⑤ $R(x) = \frac{m+n}{2}x + \frac{m-n}{2}$

해설

주어진 조건으로 식을 세우면 각각 다음과 같다.

$f(x) = (x-1)\,Q_1(x) + m$

$\quad\;\; = (x+1)\,Q_2(x) + n$

$f(x) = (x-1)(x+1)\,Q_3(x) + R(x)$

즉, $f(1) = R(1) = m \;\cdots$ ①

$f(-1) = R(-1) = n \;\cdots$ ②

$R(x) = ax + b$라 하면 ①,②에 의해

$a + b = m,\; -a + b = n$이므로

$a = \frac{m-n}{2},\; b = \frac{m+n}{2}$

$\therefore R(x) = \frac{m-n}{2}x + \frac{m+n}{2}$

4. 두 다항식 x^3+2x^2-x-2와 x^2+ax+b의 최대공약수는 $x+1$이고, 최소공배수는 x^4-5x^2+4이다. 이 때, 상수 a, b에 대하여 ab의 값은?

① -2　② 2　③ 3　④ 1　⑤ -1

해설

$x^3+2x^2-x-2=(x+1)(x+2)(x-1)$

$x^2+ax+b=(x+1)(x+k)$

$x^4-5x^2+4=(x+1)(x-1)(x+2)(x-2)$

$\therefore\ (x+1)(x-1)(x+2)(x-2)=(x+1)(x+2)(x-1)(x+k)$

$\therefore\ k=-2$

$x^2+ax+b=(x+1)(x-2)=x^2-x-2$

$\therefore\ a=-1, b=-2$

$\therefore\ ab=2$

5. 삼차방정식 $x^3-3x^2+ax+b=0$ 의 한 근이 $1+i$ 일 때, 실수 a, b 에 대하여 $a+b$ 의 값을 구하면?(단, $i=\sqrt{-1}$)

① 1 ② 2 ③ 3 ④ 4 ⑤ 5

해설

세 근을 $1+i, 1-i, \alpha$ 라 하자. 근과 계수와의 관계에 따라

합: $(1+i)+(1-i)+\alpha=3, \alpha=1 \cdots$ ㉠

곱: $(1+i)(1-i)\alpha=2\cdot(1)=-b,\quad b=-2\cdots$ ㉡

$a=(1+i)(1-i)+1(1-i)+1(1+i)=2+1-i+1+i=4$

$a+b=4-2=2$

6. x, y가 연립방정식 $\begin{cases} x^2 + 4xy + y^2 = 10 \\ x - y = 2 \end{cases}$ 를 만족시킬 때, $(x+y)^2$ 의 값을 구하면?

① 5　② 6　③ 7　④ 8　⑤ 10

해설

$(x-y)^2 = 4$ 에서

$$\begin{cases} x^2 - 2xy + y^2 = 4 & \cdots ㉠ \\ x^2 + 4xy + y^2 = 10 & \cdots ㉡ \end{cases}$$

㉡ − ㉠ : $6xy = 6$,

$\therefore\ xy = 1$

$$\begin{aligned} \therefore\ (x+y)^2 &= (x-y)^2 + 4xy \\ &= 4 + 4 \cdot 1 = 8 \end{aligned}$$

해설

실제로 연립방정식을 풀면,

$x = y + 2$를 ㉡에 대입하면

$(y+2)^2 + 4y(y+2) + y^2 = 10$

$6y^2 + 12y - 6 = 0$, $y^2 + 2y - 1 = 0$

근의 공식을 이용하면,

$\therefore\ y = -1 \pm \sqrt{2},\ x = 1 \pm \sqrt{2}$(복호동순)

$$\begin{aligned} \therefore\ (x+y)^2 &= ((1 \pm \sqrt{2}) + (-1 \pm \sqrt{2}))^2 \\ &= (\pm 2\sqrt{2})^2 = 8 \end{aligned}$$

7. 연립방정식 $\begin{cases} 2x^2+3xy-2y^2=0 \\ x^2+y^2=20 \end{cases}$ 의 해를 $x=\alpha,\ y=\beta$라 할 때, $\alpha+\beta$의 최솟값을 구하면?

① -8 ② -6 ③ -4 ④ -2 ⑤ 0

해설

$\begin{cases} (2x-y)(x+2y)=0 \\ x^2+y^2=20 \end{cases}$

1) $y=2x$일 때

$x^2+4x^2=5x^2=20\ \ \therefore\ x=\pm 2,\ y=\pm 4$

2) $x=-2y$일 때

$4y^2+y^2=5y^2=20$

$\therefore\ y=\pm 2,\ x=\mp 4$ (복호동순)

$\therefore (x,\ y)=(2,\ 4),(-2,\ -4),(-4,\ 2),(4,\ -2)$

$\therefore\ \alpha+\beta=\ 6,\ -6,\ -2,\ 2$

그러므로 $\alpha+\beta$의 최솟값은 -6

8. 방정식 $2x^2 - 4xy + 4y^2 - 8x + 16 = 0$을 만족하는 실수 x, y에 대하여 x와 y의 곱은?

① -2　② 3　③ 4　④ 8　⑤ 10

해설

$2x^2 - 4xy + 4y^2 - 8x + 16 = 0$에서

$(x^2 - 4xy + 4y^2) + (x^2 - 8x + 16) = 0,$

$(x - 2y)^2 + (x - 4)^2 = 0$

$x = 2y, x = 4$

$\therefore\ x = 4, y = 2 \quad \therefore\ xy = 8$