1. x 에 대한 다항식 $3x^3y+5y-xz+9xy-4$ 에 대하여 다음 보기 중 옳은 것을 모두 고른 것은?

> ㉠ 내림차순으로 정리하면
> $3yx^3+(9y-z)x+5y-4$ 이다.
> ㉡ 오름차순으로 정리하면
> $5y-4+(9y-z)x+3yx^3$ 이다.
> ㉢ 주어진 다항식은 x 에 대한 3 차식이다.
> ㉣ x^3 의 계수는 3이다.
> ㉤ 상수항은 -4 이다.

① ㉠, ㉢ ② ㉠, ㉡, ㉢
③ ㉠, ㉡ ④ ㉠, ㉢, ㉣, ㉤
⑤ ㉠, ㉡, ㉢, ㉣, ㉤

해설

㉣ x^3 의 계수는 $3y$ 이다.
㉤ 상수항은 $5y-4$ 이다.

2. $f(x)=x^3-3x^2+3x+1$ 일 때, $f(x)-2=x(x^2-1)+a(x-x^2)+b(x^2-1)$ 가 항상 성립하도록 하는 상수 $a,\ b$에 대하여 $a+b$의 값은?

① 1 ② 2 ③ 3 ④ 4 ⑤ 5

해설

$f(x)-2=x^3-3x^2+3x-1$이므로
$x^3-3x^2+3x-1=x(x^2-1)+a(x-x^2)+b(x^2-1)$
$=x^3+(-a+b)x^2+(a-1)x-b\cdots$㉠
㉠이 x에 대한 항등식이므로 양변의 차수가 같은 항의 계수가 같아야 한다.
즉, $-a+b=-3,\ a-1=3,\ b=1$
이므로 $a=4,\ b=1$
$\therefore\ a+b=5$

3. 다항식 $f(x)=x^3+2x^2-x+k$가 일차식 $x-1$을 인수로 가질 때, 이 다항식 $f(x)$를 인수분해 하면?

① $(x-2)(x-1)(x+1)$　② $(x-1)x(x+2)$

③ $(x+1)(x-1)(x+2)$　④ $(x-2)(x-1)(x+2)$

⑤ $(x-2)(x+1)(x+2)$

해설

$f(x)=(x-1)Q(x) \Rightarrow f(1)=0$

$\therefore f(1)=2+k=0, \quad \therefore k=-2$

즉, $f(x)=x^3+2x^2-x-2$

$=(x-1)(x+1)(x+2)$

4. 두 다항식 A, B에 대하여 연산 $\triangle$, $\blacktriangledown$를 $A\triangle B = 2A + B$, $A\blacktriangledown B = A - 3B$로 정의한다.
$A = 2 + 3x^2 - x^3$, $B = x^2 + 3x + 1$일 때 $A\blacktriangledown(B\triangle A)$를 구하면?

① $2x^3 - 18x - 10$
② $2x^3 - 12x^2 - 18x - 10$
③ $2x^3 + 12x^2 + 18x + 10$
④ $2x^3 + 12x^2 + 18x - 10$
⑤ $2x^3 - 12x^2 + 18x + 10$

해설

$$A\blacktriangledown(B\triangle A) = A\blacktriangledown(2B + A)$$
$$= A - 3(2B + A) = -2A - 6B$$

위와 같이 식을 간단히 정리한 후 A, B에 대입하여 정리한다.

5. 세 다항식 $A = x^2 + 3x - 2,\ B = 3x^2 - 2x + 1,\ C = 4x^2 + 2x - 3$ 에 대하여
$3A - \{5A - (3B - 4C)\} + 2B$를 간단히 하면?

① $3x^2 + 12x - 13$
② $-3x^2 + 24x + 21$
③ $3x^2 - 12x + 21$
④ $-3x^2 - 24x + 21$
⑤ $x^2 + 12x + 11$

해설

$3A - \{5A - (3B - 4C)\} + 2B$
$= -2A + 5B - 4C$
$= -2(x^2 + 3x - 2) + 5(3x^2 - 2x + 1) - 4(4x^2 + 2x - 3)$
$= -3x^2 - 24x + 21$

6. 다항식 $x^5\left(x+\frac{1}{x}\right)\left(1+\frac{2}{x}+\frac{3}{x^2}\right)$의 차수는?

① 2차 ② 3차 ③ 6차 ④ 7차 ⑤ 8차

해설

$x^5\left(x+\frac{1}{x}\right)\left(1+\frac{2}{x}+\frac{3}{x^2}\right)$

$=x^2(x^2+1)(x^2+2x+3)$

$\therefore$ 6차 다항식

7. 다항식 $f(x)$를 다항식 $g(x)$로 나눈 나머지를 $r(x)$라 할 때, $f(x)-g(x)-2r(x)$를 $g(x)$로 나눈 나머지는?

① $-2r(x)$ ② $-r(x)$ ③ 0
④ $r(x)$ ⑤ $2r(x)$

해설

$f(x)$를 $g(x)$로 나눈 몫을 $Q(x)$라 하면
$f(x)=g(x)Q(x)+r(x)$
$\therefore f(x)-g(x)-2r(x)$
$=g(x)Q(x)+r(x)-g(x)-2r(x)$
$=g(x)\{Q(x)-1\}-r(x)$
여기서 $g(x)$의 차수는 $-r(x)$의 차수보다 높으므로 구하는 나머지는 $-r(x)$이다.

8. 사차식 $3x^4 - 5x^2 + 4x - 7$을 이차식 A로 나누었더니 몫이 $x^2 - 2$이고 나머지가 $4x - 5$일 때, 이차식 A를 구하면?

① $3x^2 - 2$　② $3x^2 - 1$　③ $3x^2$

④ $3x^2 + 1$　⑤ $3x^2 + 2$

해설

검산식 : $3x^4 - 5x^2 + 4x - 7 = A(x^2 - 2) + 4x - 5$

$A = \dfrac{3x^4 - 5x^2 - 2}{x^2 - 2} = 3x^2 + 1$

9. 다항식 $A = 2x^3 - 7x^2 - 4$ 를 다항식 B 로 나눌 때, 몫이 $2x - 1$, 나머지가 $-7x - 2$ 이다. 다항식 $B = ax^2 + bx + c$ 일 때, $a^2 + b^2 + c^2$ 의 값은?

① 3 ② 6 ③ 9 ④ 14 ⑤ 17

해설

$A = 2x^3 - 7x^2 - 4 = B(2x - 1) - 7x - 2$ 이다.
$2x^3 - 7x^2 + 7x - 2 = B(2x - 1)$
좌변을 $2x - 1$ 로 나누면
$2x^3 - 7x^2 + 7x - 2 = (2x - 1)(x^2 - 3x + 2)$
$\therefore\ B = x^2 - 3x + 2$

10. $x^2 - x + 1 = 0$ 일 때, $x^5 + \frac{1}{x^5}$ 의 값은?

① -2 ② -1 ③ 0 ④ 1 ⑤ 2

해설

$x^2 - x + 1 = 0$, 양변에 $x + 1$을 곱하면,

$(x + 1)(x^2 - x + 1) = 0$

$x^3 + 1 = 0$, $x^3 = -1$에서 $x^5 = x^3 \times x^2 = -x^2$

$$x^5 + \frac{1}{x^5} = -\left(x^2 + \frac{1}{x^2}\right) \cdots\cdots ①$$

$x^2 - x + 1 = 0$를 x로 나누어 정리한다.

$$x + \frac{1}{x} = 1$$

$$x^2 + \frac{1}{x^2} = \left(x + \frac{1}{x}\right)^2 - 2 = -1$$

① 에 대입하면, $x^5 + \frac{1}{x^5} = 1$

11. 등식 $(x+1)(x-1)(x^3-x^2+x-1)=x^5-x^4+ax-b$가 항상 성립하도록 a,b값을 정할 때, $a+b$의 값을 구하면?

① -2 ② -1 ③ 0 ④ 1 ⑤ 2

해설

양변에 $x=1$을 대입하면, $0=a-b\cdots$㉠
양변에 $x=-1$을 대입하면, $0=-2-a-b\cdots$㉡
㉠, ㉡ 에서 $a=b=-1$
$\therefore\ a+b=-2$

12. x^3-4x^2+ax+b를 $(x+1)^2$으로 나누면 나머지가 7이 될 때, $a+b$의 값은?

① -12 ② -10 ③ 0 ④ 10 ⑤ 12

해설

직접 나눠본다.

$$\begin{array}{r} x-6 \\ x^2+2x+1 \overline{)\,x^3-4x^2+\quad ax+b} \\ -\left|\begin{array}{r} x^3+2x^2+\quad x \end{array}\right. \\ \hline \quad -6x^2+(a-1)x+b \\ -\left|\begin{array}{r} -6x^2-\quad 12x-6 \end{array}\right. \\ \hline \quad (a+11)x+b+6 \end{array}$$

나머지가 7이므로 $a+11=0,\ b+6=7$

$\therefore\ a=-11,\ b=1$

$\therefore\ a+b=-10$

해설

x^3-4x^2+ax+b

$=(x+1)^2(x+k)+7$

$=x^3+(k+2)x^2+(2k+1)x+k+7$

계수를 비교하면

$k+2=-4, 2k+1=a, k+7=b$

$k=-6$이므로 $a=-11, b=1$

$\therefore\ a+b=-10$

13. 임의의 실수 x 에 대하여 등식 $2x^3-3x^2-x+1=a(x-1)^3+b(x-1)^2+c(x-1)+d$ 가 성립할 때, $a+b+c+d$ 의 값은? (단, a,b,c,d 는 상수)

① -3 ② -1 ③ 0 ④ 3 ⑤ 5

해설

계수의 합 $a+b+c+d$ 를 구할 때는 우변의 문자부분을 모두 1 이 되게 하는 x 값을 양변에 대입하면 간단하게 그 값을 구할 수 있다.
이 문제에서는 $x=2$ 를 양변에 대입하면
$16-12-2+1=a+b+c+d$
$\therefore\ a+b+c+d=3$

해설

a,b,c,d 의 값을 각각 구하기 위해서는 아래와 같이 조립제법을 사용할 수 있다.
$a(x-1)^3+b(x-1)^2+c(x-1)+d$
$=(x-1)[(x-1)\{a(x-1)+b\}+c]+d$
즉, $x-1$ 로 연속으로 나눌 때 나오는 나머지가 순서대로 d,c,b 가 되고 마지막 몫이 a 이다.

1	2	−3	−1	1	
		2	−1	−2	
1	2	−1	−2	−1	← d
		2	1		
1	2	1	−1	←	c
		2			
	2	3	← b		
	↑				
	a				

$\therefore\ a+b+c+d=3$

14. $f(x) = 3x^3 + ax^2 + bx - 12$가 $x-1$로는 나누어 떨어지고, $x+1$로 나누었을 때는 나머지가 -14이다. 상수 a, b의 곱 ab의 값은?

① -12 ② 12 ③ -20 ④ 20 ⑤ -36

해설

나머지 정리에 의해 $f(1) = 0, f(-1) = -14$

$f(1) = 3 + a + b - 12 = 0 \cdots ①$

$f(-1) = -3 + a - b - 12 = -14 \cdots ②$

①, ②를 연립하면, $a = 5,\ b = 4$

$\therefore\ ab = 20$

15. 다항식 $f(x)$를 $x-1$로 나눈 나머지가 2이고, $x+2$로 나눈 나머지가 5이다. 다항식 $f(x)$를 $(x-1)(x+2)$로 나눈 나머지를 $R(x)$라 할 때, $R(2)$의 값은?

① 1 ② 2 ③ 3 ④ 4 ⑤ 5

해설

나머지 정리에 의하여,
$f(x)=(x-1)(x-2)Q(x)+ax+b$라 할 수 있다.
$f(1)=a+b=2$
$f(-2)=-2a+b=5$
연립하면, $a=-1$ $b=3$
$\therefore R(x)=-x+3$
$R(2)=1$

16. 다항식 $2x^{30}+2x^{28}-x$를 $x+1$로 나누었을 때의 몫을 $Q(x)$라 할 때, $Q(x)$를 $x-1$로 나누었을 때의 나머지는?

① -2 ② -1 ③ 0 ④ 1 ⑤ 2

해설

$2x^{30}+2x^{28}-x=(x+1)Q(x)+R$
양변에 $x=-1$을 대입 하면,
$2+2+1=R \therefore R=5$
양변에 $x=1$을 대입 하면,
$2+2-1=2Q(1)+5$
$\therefore Q(1)=-1$

17. 다항식 $f(x)$, $g(x)$에서 $f(x)$를 x^2-1로 나눈 나머지가 2이고 $g(x)$를 x^2-3x+2로 나눈 나머지가 $2x+1$이다. $2f(x)+3g(x)$를 $x-1$로 나눈 나머지는?

① 13 ② −13 ③ 16 ④ −16 ⑤ 26

해설

$f(x)=(x^2-1)Q_1(x)+2,$
$\therefore\ f(1)=2$
$g(x)=(x^2-3x+2)Q_2(x)+2x+1,$
$\therefore\ g(1)=3$
$2f(x)+3g(x)$를 $x-1$로 나눈 나머지는
$2f(1)+3g(1)=2\cdot 2+3\cdot 3=13$

18. x에 대한 다항식 x^3+ax^2+bx+1를 $x+1$로 나누었을 때 몫과 나머지를 다음과 같은 조립제법으로 구하려고 한다. 다음 중 옳지 않은 것은?

k	1	a	b	1
		c	d	1
	1	3	-1	2

① $a=3$ ② $b=2$ ③ $c=-1$
④ $d=-3$ ⑤ $k=-1$

해설

다항식 x^3+ax^2+bx+1를 $x+1$로 나누었을 때의 몫과 나머지를 조립제법을 이용하여 구하면 다음과 같다.

-1	1	a	b	1
		-1	$-a+1$	$-b+a-1$
	1	$a-1$	$b-a+1$	$-b+a$

이때 $k=-1$, $c=-1$, $d=-a+1$, $b-a+1=-1$, $-b+a=2$ 이므로

$k=-1$, $c=-1$, $a=4$, $b=2$, $d=-3$

따라서 옳지 않은 것은 ①이다.

19. x에 관한 항등식 $x^3+2x^2-3x+5=a(x-1)^3+b(x-1)^2+c(x-1)+d$를 만족시키는 a, b, c, d에 대하여 $abcd$의 값은?

① -10 ② 10 ③ 50 ④ 100 ⑤ 200

해설

$a(x-1)^3+b(x-1)^2+c(x-1)+d$

$=(x-1)\{a(x-1)^2+b(x-1)+c\}+d$

$=(x-1)[(x-1)\{a(x-1)+b\}+c]+d$

따라서 x^3+2x^2-3x+5를 $x-1$로 연속으로 나눌 때 나오는 나머지가 순서대로 d, c, b가 되고 마지막의 몫이 a이다.

$a=1,\ b=5,\ c=4,\ d=5$

$\therefore\ abcd=100$

20. 다음 ㉠~㉣중 인수분해를 한 결과가 <u>틀린</u> 것은 모두 몇 개인가?

㉠ $x^2(a-b)-y^2(b-a)=(a-b)(x+y)(x-y)$

㉡ $9x^2+3xy-2y^2=(3x-2y)(3x+y)$

㉢ $x^3-125=(x-5)(x^2-5x+25)$

㉣ $2x^2-xy-y^2-4x+y+2=(2x-y+2)(x-y+1)$

① 0 개 ② 1 개 ③ 2 개 ④ 3 개 ⑤ 4 개

해설

㉠ $x^2(a-b)-y^2(b-a)=x^2(a-b)+y^2(a-b)=(a-b)(x^2+y^2)$

㉡ $9x^2+3xy-2y^2=(3x+2y)(3x-y)$

㉢ $x^3-125=(x-5)(x^2+5x+25)$

㉣ $2x^2-xy-y^2-4x+y+2$

$=2x^2-(4+y)x-(y^2-y-2)$

$=2x^2-(4+y)x-(y-2)(y+1)$

$=\{2x+(y-2)\}\{x-(y+1)\}$

$=(2x+y-2)(x-y-1)$

21. 실수 x, y가 $xy=6$, $x^2y+xy^2+x+y=63$을 만족시킬 때, x^2+y^2의 값은?

① 13 ② $\frac{1173}{32}$ ③ 55 ④ 69 ⑤ 81

해설

x^2y+xy^2+x+y
$=xy(x+y)+(x+y)$
$=(xy+1)(x+y)$
$=7(x+y)=63,$
$x+y=9,\ xy=6$
$\therefore\ x^2+y^2=(x+y)^2-2xy$
$=81-12=69$