

1. 이차함수 $y = x^2 - 8x + a$ 의 그래프와 x 축과의 교점의 x 좌표가 6, b 일 때, $a + b$ 의 값은?

- ① 11 ② 12 ③ 13 ④ 14 ⑤ 15

해설

이차함수 $y = x^2 - 8x + a$ 의 그래프와
 x 축과의 교점의 x 좌표는
이차방정식 $x^2 - 8x + a = 0$ 의 실근이다.
 $x^2 - 8x + a = 0$ 에 $x = 6$ 을 대입하면
 $36 - 48 + a = 0$ 에서 $a = 12$
따라서 $x^2 - 8x + 12 = 0$ 에서 $(x - 2)(x - 6) = 0$
 $x = 2$ 또는 $x = 6$
 $\therefore b = 2 \therefore a + b = 14$

2. 함수 $y = -x^2 + kx$ 의 그래프가 직선 $y = -x + 4$ 에 접할 때, 양수 k 의 값은?

- ① 1 ② $\frac{3}{2}$ ③ 2 ④ $\frac{5}{2}$ ⑤ 3

해설

$y = -x^2 + kx$ 가 $y = -x + 4$ 에 접하려면
 $4 - x = -x^2 + kx \Rightarrow x^2 - (k+1)x + 4 = 0$ 의 판별식은 $D = 0$
이어야 한다.
 $D = (k+1)^2 - 16 = 0 \Rightarrow k+1 = \pm 4$
 $\therefore k = 3$ ($\because k > 0$)

3. 포물선 $y = -x^2 + kx$ 와 직선 $y = x + 1$ 이 서로 다른 두 점에서 만나기 위한 k 의 범위는?

① $k > 2, k < -1$ ② $k > 3, k < -1$ ③ $k > 1, k < -1$

④ $k > 3, k < -2$ ⑤ $k > 3, k < -3$

해설

포물선과 직선이 다른 두 점에서 만나므로
 $-x^2 + kx = x + 1, x^2 + (1 - k)x + 1 = 0$ 에서
 $D = (1 - k)^2 - 4 > 0$
 $k^2 - 2k - 3 = (k - 3)(k + 1) > 0$
 $\therefore k > 3$ 또는 $k < -1$

4. 이차함수 $y = x^2 - 2(k-1)x + 9$ 의 그래프가 x 축과 만나지 않기 위한 정수 k 의 개수는?

- ① 4개 ② 5개 ③ 6개 ④ 7개 ⑤ 8개

해설

이차함수 $y = x^2 - 2(k-1)x + 9$ 의 그래프가 x 축과 만나지 않으려면

이차방정식 $y = x^2 - 2(k-1)x + 9 = 0$ 의 판별식을 D 라 할 때 $D < 0$ 이어야 한다.

$$\frac{D}{4} = (k-1)^2 - 9 < 0$$

$$k^2 - 2k - 8 < 0, (k+2)(k-4) < 0$$

$$\therefore -2 < k < 4$$

따라서, k 값 중 정수인 것은 $-1, 0, 1, 2, 3$ 의 5개이다.

5. 이차함수 $y = x^2 - 8x + k$ 의 그래프가 x 축과 서로 두 점에서 만날 때, 자연수 k 의 개수는?

① 4개 ② 8개 ③ 10개 ④ 13개 ⑤ 15개

해설

그래프가 x 축과 두 점에서 만나려면
 $x^2 - 8x + k = 0$ 의 판별식이 0 보다 커야한다.
 $\Rightarrow D' = 4^2 - k > 0$
 $\Rightarrow k < 16$
 \therefore 자연수 k 의 개수 : 15 개

6. 직선 $y = mx - 4$ 가 이차함수 $y = 2x^2 - 3$ 의 그래프에 접하도록 하는 양수 m 의 값은?

- ① $\sqrt{2}$ ② 2 ③ $\sqrt{6}$ ④ $2\sqrt{2}$ ⑤ 4

해설

이차방정식 $2x^2 - 3 = mx - 4$, 즉 $2x^2 - mx + 1 = 0$ 이 이차방정식이 중근을 가져야 하므로

$$D = (-m)^2 - 4 \cdot 2 \cdot 1 = 0$$

$$m^2 - 8 = 0, m^2 = 8$$

$$\therefore m = 2\sqrt{2} (\because m > 0)$$

7. 직선 $y = ax + 1$ 이 두 이차함수 $y = x^2 + x + 2$, $y = -x^2 + 4x$ 의 그래프와 모두 만나지 않도록 상수 a 의 값의 범위를 정하면 $\alpha < a < \beta$ 이다. 이 때, $\alpha + \beta$ 의 값을 구하면?

- ① -5 ② -3 ③ 0 ④ 3 ⑤ 5

해설

직선과 이차함수를 연립하여 판별식이 0 보다 작으면 직선과 이차함수가 만나지 않는다.

$$\begin{aligned} 1) \quad ax + 1 &= x^2 + x + 2 & 2) \quad ax + 1 &= -x^2 + 4x \\ \Rightarrow x^2 + (1-a)x + 1 &= 0 & \Rightarrow x^2 + (a-4)x + 1 &= 0 \\ D &= (a-1)^2 - 4 < 0 & D &= (a-4)^2 - 4 < 0 \\ \Rightarrow -1 < a < 3 & & \Rightarrow 2 < a < 6 & \end{aligned}$$

\therefore 1), 2) 의 공통 해 : $2 < a < 3$

$\therefore \alpha + \beta = 5$

8. 곡선 $y = -x^2 + kx$ 과 직선 $y = x + 1$ 이 서로 다른 두 점에서 만나도록 하는 k 의 값이 아닌 것은?

① -6 ② -3 ③ 3 ④ 6 ⑤ 9

해설

곡선과 직선이 서로 다른 두 점에서 만나려면
 $-x^2 + kx = x + 1$ 의 판별식이 0 보다 커야 한다.
 $\Rightarrow x^2 + (1-k)x + 1 = 0$
 $D = (1-k)^2 - 4 > 0, (k+1)(k-3) > 0$
 $k < -1$ 또는 $k > 3$
 $\therefore 3$ 은 주어진 조건을 만족시키지 못한다.

9. 이차함수 $y = x^2 + ax + b$ 가 두 직선 $y = -2x + 1$, $y = 4x - 2$ 에 동시에 접할 때, 상수 a, b 의 합은?

- ① 0 ② 1 ③ 2 ④ 3 ⑤ 4

해설

$$y = x^2 + ax + b \cdots \textcircled{1}$$

$$y = -2x + 1 \cdots \textcircled{2}$$

$$y = 4x - 2 \cdots \textcircled{3}$$

①과 ②이 접하므로 $x^2 + ax + b = -2x + 1$

즉, $x^2 + (a+2)x + b - 1 = 0$ 에서

$$D = (a+2)^2 - 4(b-1) = 0$$

$$\therefore a^2 + 4a - 4b + 8 = 0 \cdots \textcircled{4}$$

①과 ③이 접하므로 $x^2 + ax + b = 4x - 2$

즉, $x^2 + (a-4)x + b + 2 = 0$ 에서

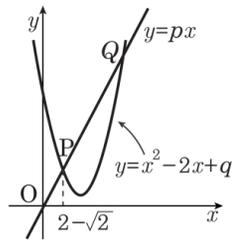
$$D = (a-4)^2 - 4(b+2) = 0$$

$$\therefore a^2 - 8a - 4b + 8 = 0 \cdots \textcircled{5}$$

④과 ⑤를 연립하여 풀면 $a = 0, b = 2$

$$\therefore a + b = 2$$

10. 다음 그림과 같이 직선 $y = px$ 와 이차함수 $y = x^2 - 2x + q$ 의 그래프가 두 점 P, Q 에서 만나고 점 P 의 x 좌표가 $2 - \sqrt{2}$ 이다. 이때, 유리수 p, q 의 곱 pq 의 값은?

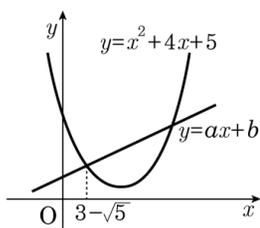


- ① 1 ② 4 ③ 6 ④ 9 ⑤ 12

해설

두 점 P, Q 의 x 좌표는
 이차방정식 $x^2 - 2x + q = px$ 의 두 실근이다.
 $x^2 - (p+2)x + q = 0$ 에서 p, q 는 유리수이므로
 한 근이 $2 - \sqrt{2}$ 이면 다른 한 근은 $2 + \sqrt{2}$ 이다.
 따라서 근과 계수의 관계에 의하여
 $(2 - \sqrt{2}) + (2 + \sqrt{2}) = p + 2$
 $\therefore p = 2$
 $(2 - \sqrt{2})(2 + \sqrt{2}) = q$
 $\therefore q = 2$
 $\therefore pq = 4$

11. 다음 그림과 같이 포물선 $y = x^2 - 4x + 5$ 와 직선 $y = ax + b$ 의 두 교점 중 한 교점의 x 좌표가 $3 - \sqrt{5}$ 일 때, 유리수 a, b 의 합 $a + b$ 의 값은?



- ① 3 ② 4 ③ 5 ④ 6 ⑤ 7

해설

연립방정식 $y = x^2 - 4x + 5, y = ax + b$ 에서
 y 를 소거하면 $x^2 - 4x + 5 = ax + b$
 $x^2 - (4 + a)x + 5 - b = 0 \cdots \textcircled{1}$
 이 때, 계수가 유리수인 방정식 $\textcircled{1}$ 의 한 근이
 $3 - \sqrt{5}$ 이므로 $3 + \sqrt{5}$ 도 근이 된다.
 $\therefore (3 - \sqrt{5}) + (3 + \sqrt{5}) = 4 + a$
 $(3 - \sqrt{5})(3 + \sqrt{5}) = 5 - b$
 $\therefore a = 2, b = 1$
 $\therefore a + b = 3$

12. 두 개의 곡선 $y = ax^2 + bx + 8$, $y = 2x^2 - 3x + 2$ 의 두 교점을 연결하는 직선이 $y = -x + 6$ 일 때, 상수 a , b 의 값을 구하면?

① $a = -1, b = -1$

② $a = -1, b = 0$

③ $a = 1, b = 0$

④ $a = 1, b = -1$

⑤ $a = 0, b = 1$

해설

$y = ax^2 + bx + 8 \dots ①$

$y = 2x^2 - 3x + 2 \dots ②$

$y = -x + 6 \dots ③$

두 교점을 ①, ②, ③이 모두 지나므로

②, ③의 교점을 ①이 지난다고 생각해도 좋다.

②, ③을 연립하여 풀면

교점은 (2, 4), (-1, 7) 이고,

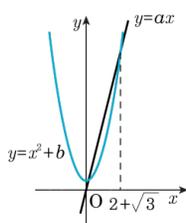
이 두 점을 곡선 ①이 지나므로

$4a + 2b + 8 = 4, a - b + 8 = 7$

$\therefore a = -1, b = 0$

13. 다음 그림과 같이 이차함수 $y = x^2 + b$ 의 그래프와 직선 $y = ax$ 가 서로 두 점에서 만나고, 한 교점의 x 좌표가 $2 + \sqrt{3}$ 일 때, $a + b$ 의 값은?(단, a, b 는 유리수)

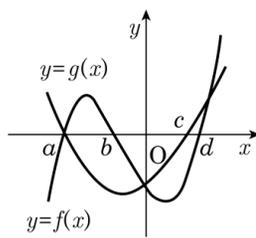
- ① 1 ② 2 ③ 3 ④ 4 ⑤ 5



해설

$x^2 + b = ax$,
 즉 $x^2 - ax + b = 0$ 의 한 근이 $2 + \sqrt{3}$ 이다.
 이때, a, b 는 모두 유리수이므로
 방정식 $x^2 - ax + b = 0$ 의 한 근이 $2 + \sqrt{3}$ 이면
 다른 한 근은 $2 - \sqrt{3}$ 이다.
 따라서 근과 계수와의 관계에 의하여
 $a = (2 + \sqrt{3}) + (2 - \sqrt{3}) = 4$,
 $b = (2 + \sqrt{3})(2 - \sqrt{3}) = 1$
 $\therefore a + b = 5$

14. 두 개의 방정식 $f(x) = 0$, $g(x) = 0$ 을 좌표평면에 나타내었더니 다음 그림과 같았다. 이 때, 다음 중 $\{f(x)\}^2 + \{g(x)\}^2 = 0$ 를 만족하는 것을 고르면?



- ① a ② a, b ③ a, c
 ④ a, b, d ⑤ a, b, c, d

해설

$f(x) = 0, g(x) = 0$ 를 모두 만족하는 것은 a 이다.
 $(\because$ 실수 a, b 에 대하여 $a^2 + b^2 = 0$ 이면
 $a = 0$ 이고 $b = 0$ 이다.)

15. $y = 0$, $y = (k-2)x^2 - 6(k-1)x + 9k + 1$ 을 동시에 만족하는 (x, y) 가 2개일 때, 정수 k 의 최댓값은?

- ① 8 ② 9 ③ 10 ④ 11 ⑤ 12

해설

$y = (k-2)x^2 - 6(k-1)x + 9k + 1$ 의 그래프는 x 축과 서로 다른 두 점에서 만난다.

이 때, 방정식 $(k-2)x^2 - 6(k-1)x + 9k + 1 = 0$ 은 이차방정식이어야 하므로 $k-2 \neq 0$

$$\therefore k \neq 2 \dots\dots \textcircled{A}$$

또, 이차방정식의 판별식을 D 라하면 $D > 0$ 이어야 하므로

$$\frac{D}{4} = \{3(k-1)\}^2 - (k-2)(9k+1) > 0$$

$$9(k^2 - 2k + 1) - (9k^2 - 17k - 2) > 0$$

$$-k + 11 > 0$$

$$\therefore k < 11 \dots\dots \textcircled{B}$$

①, ②에서 $k < 11$, $k \neq 2$

따라서, 정수 k 의 최댓값은 10이다.