1. 다음 연립방정식의 해를 구하면?

$$\begin{cases} 0.6x + 0.5y = 2.8 & \cdots ㉠ \\ \dfrac{1}{3}x + \dfrac{1}{2}y = 2 & \cdots ㉡ \end{cases}$$

① $(2, 3)$ ② $(-2, 3)$ ③ $(3, 2)$

④ $(3, -2)$ ⑤ $(-3, -2)$

해설

㉠, ㉡의 양변에 각각 10, 6을 곱하면

$$\begin{cases} 6x + 5y = 28 & \cdots\cdots ㉢ \\ 2x + 3y = 12 & \cdots\cdots ㉣ \end{cases}$$

㉢ − ㉣×3을 하면 $-4y = -8$

$\therefore\ y = 2$를 ㉣대입하면 $x = 3$

$\therefore\ x = 3,\ y = 2$

2. $x(x-1)(x+1)-6=0$의 세근을 구하면?

① $2,\ -1,\ -3$ ② $-2,\ 1,\ -3$ ③ $2,\ 1,\ -3$

④ $-2,\ -1\pm\sqrt{2}i$ ⑤ $2,\ -1\pm\sqrt{2}i$

해설

준식$=x(x^2-1)-6=x^3-x-6=0$

$$\begin{array}{c|cccc} 2 & 1 & 0 & -1 & -6 \\ & & 2 & 4 & 6 \\ \hline & 1 & 2 & 3 & \boxed{0} \end{array}$$

$(x-2)(x^2+2x+3)=0$

$\therefore\ x=2, -1\pm\sqrt{2}i$

3. 방정식 $x^3 - x = 0$의 해를 구하여라.

▶ 답 :

▶ 답 :

▶ 답 :

▷ 정답 : $x = -1$

▷ 정답 : $x = 0$

▷ 정답 : $x = 1$

해설

좌변을 인수분해 하면

$x^3 - x = x(x^2 - 1) = x(x - 1)(x + 1)$

$\therefore \ x = -1, 0, 1$

4. 다음 중 방정식 $x^4 - 3x^3 + 5x^2 - x - 10 = 0$의 근이 아닌 것은?

① -1 ② 1 ③ 2

④ $1 + 2i$ ⑤ $1 - 2i$

해설

조립제법을 이용하여 주어진 식을 인수분해 하면

$x^4 - 3x^3 + 5x^2 - x - 10 = 0$

$(x+1)(x^3 - 4x^2 + 9x - 10) = 0$

$(x+1)(x-2)(x^2 - 2x + 5) = 0$

$(x+1)(x-2)(x-1-2i)(x-1+2i) = 0$

$\therefore \ x = -1, \ 2, \ 1+2i, \ 1-2i$

따라서 근이 아닌 것은 1이다.

5. 사차방정식 $x^4 + x^3 - 7x^2 - x + 6 = 0$의 근 중에서 최대의 근은?

① -2 ② -1 ③ 0 ④ 6 ⑤ 2

해설

$x^4 + x^3 - 7x^2 - x + 6 = 0$ 에서

$x = 1,\ x = -1$을 대입하면 성립하므로

$x^4 + x^3 - 7x^2 - x + 6$

$= (x-1)(x+1)(x^2 + x - 6)$

$= (x-1)(x+1)(x+3)(x-2) = 0$

$\therefore\ x = -3,\ -1,\ 1,\ 2$

따라서 최대의 근은 2

6. 다음 방정식의 모든 해의 합을 구하여라.

$$x^4 - 13x^2 + 36 = 0$$

▶ 답 :

▷ 정답 : 0

해설

$x^4 - 13x^2 + 36 = 0$에서

$x^2 = t$로 놓으면

$t^2 - 13t + 36 = 0$, $(t-4)(t-9) = 0$

$\therefore\ t = 4$ 또는 $t = 9$

(i) $t = 4$일 때, $x^2 = 4$

$\therefore\ x = \pm 2$

(ii) $t = 9$일 때, $x^2 = 9$

$\therefore\ x = \pm 3$

따라서 모든 해의 합은

$(-2) + 2 + (-3) + 3 = 0$

7. x, y에 대한 연립방정식 $\begin{cases} ax - y = a \\ x - ay = 1 \end{cases}$ 이 오직 한 쌍의 해를 갖도록 하는 a값은?

① $a = -1$

② $a = 1$

③ $a = \pm 1$

④ $a \neq \pm 1$인 모든 실수

⑤ 없다.

해설

연립방정식이 오직 한 쌍의 해를 가지려면

$\dfrac{a}{1} \neq \dfrac{-1}{-a}$, $-a^2 \neq -1$

$\therefore\ a \neq \pm 1$

따라서 오직 한 쌍의 해를 갖도록 하는

a의 값은 $a \neq \pm 1$인 모든 실수이다.

8. 연립방정식 $\begin{cases} x-y=1 \\ x^2+y^2=5 \end{cases}$ 을 풀 때, xy의 값은?

① -2 ② -1 ③ 1 ④ 2 ⑤ 4

해설

$\begin{cases} x-y=1 \cdots ㉠ \\ x^2+y^2=5 \cdots ㉡ \end{cases}$

㉡를 곱셈법칙에 의해 변형하면,

$x^2+y^2=(x-y)^2+2xy$

$5=1^2+2xy$

$\therefore\ xy=2$

9. $\dfrac{x+1}{2}=\dfrac{y-3}{5}=\dfrac{z+2}{3}$, $x \geq 0$, $y \geq 0$, $z \geq 0$ 일 때 $x^2-y^2+z^2$ 의 최댓값을 구하여라.

▶ 답 :

▷ 정답 : -40

해설

$\dfrac{x+1}{2}=\dfrac{y-3}{5}=\dfrac{z+2}{3}=t$ 라 하면

$x=2t-1$, $y=5t+3$, $z=3t-2$ 이므로

$x^2-y^2+z^2=(2t-1)^2-(5t+3)^2+(3t-2)^2=-12t^2-46t-4$ $\cdots$ ㉠

$x \geq 0$, $y \geq 0$, $z \geq 0$ 이므로

$t \geq \dfrac{1}{2}$, $t \geq -\dfrac{3}{5}$, $t \geq \dfrac{2}{3}$

$\therefore\ t \geq \dfrac{2}{3}$

이 범위에서 ㉠은 감소하므로

$t=\dfrac{2}{3}$ 일 때 최대이고 최댓값은

$-12\left(\dfrac{2}{3}\right)^2-46\cdot\dfrac{2}{3}-4=-40$

10. m이 실수일 때, x에 대한 이차방정식 $x^2+2mx+2m^2-2m-3=0$의 두 실근 α, β에 대하여 $\alpha\beta$의 최댓값은?

① 5 ② 6 ③ 7 ④ 8 ⑤ 9

해설

$x^2+2mx+2m^2-2m-3=0$이 실근을 가지므로

$$\frac{D}{4}=m^2-(2m^2-2m-3)\geq 0$$

$m^2-2m-3\leq 0, (m+1)(m-3)\leq 0$

$\therefore -1\leq m\leq 3$

한편, 이차방정식의 근과 계수의 관계에 의하여

$$\alpha\beta=2m^2-2m-3=2\left(m-\frac{1}{2}\right)^2-\frac{7}{2}$$

이 때, $-1\leq m\leq 3$이므로 $m=3$일 때

$\alpha\beta$의 최댓값은 9이다.

11. x, y, z가 실수일 때, 다음 식의 최댓값을 구하여라.

$$4x - x^2 - y^2 - z^2 + 5$$

▶ 답 :

▷ 정답 : 9

해설

$4x - x^2 - y^2 - z^2 + 5$

$= -(x^2 - 4x) - y^2 - z^2 + 5$

$= -(x-2)^2 - y^2 - z^2 + 9$

$x,\ y,\ z$는 실수이므로

$(x-2)^2 \geq 0,\ y^2 \geq 0,\ z^2 \geq 0$

따라서 $4x - x^2 - y^2 - z^2 + 5$ 는

$x - 2 = 0,\ y = 0,\ z = 0$일 때,

최댓값 9를 갖는다.

12. 밑변의 길이와 높이의 합이 36 cm 인 삼각형의 최대 넓이를 구하여라.

▶ 답 : ________ cm^2

▷ 정답 : 162 cm^2

해설

삼각형의 밑변의 길이를 x cm, 넓이를 y cm^2 라 하자.

$$
\begin{aligned}
y &= \frac{1}{2}x(36-x) \\
&= -\frac{1}{2}(x^2-36x) \\
&= -\frac{1}{2}(x-18)^2+162
\end{aligned}
$$

따라서 삼각형의 최대 넓이는 162 cm^2

13. 둘레의 길이가 16cm 인 철사를 구부려서 부채꼴모양을 만들려고 한다. 부채꼴의 넓이가 최대가 되도록 하는 부채꼴의 반지름을 a , 이때 부채꼴의 넓이를 b 라 할 때, ab 의 값을 구하면?

① 16 ② 20 ③ 36 ④ 55 ⑤ 64

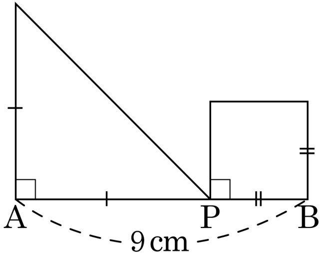
해설

부채꼴의 반지름을 a, 넓이를 b 라 하면

$$
\begin{aligned}
b &= \frac{1}{2} \times a \times (16 - 2a) = a(8 - a) \\
&= -a^2 + 8a \\
&= -(a^2 - 8a + 16 - 16) \\
&= -(a - 4)^2 + 16
\end{aligned}
$$

이 그래프가 위로 볼록이므로 꼭짓점이 최댓값을 나타낸다.
꼭짓점은 $(4, 16)$ 이므로 반지름 $a = 4$ 일 때, 부채꼴의 넓이 $b = 16$ 으로 최대가 된다.
따라서 $ab = 64$ 이다.

14. 길이가 9 cm 인 선분 AB 위에 점 P를 잡아서 다음 그림과 같이 직각이등변삼각형과 정사각형을 만들어 넓이의 합이 최소가 되게 할 때, 선분 AP 의 길이는?



① 6cm ② 5.5cm ③ 5cm

④ 4.5cm ⑤ 4cm

해설

선분 AP 의 길이를 x라 하고 직각이등변삼각형과 정사각형의 넓이의 합을 S 라 하면

$$S = \frac{1}{2}x^2 + (9 - x)^2 = \frac{3}{2}(x - 6)^2 + 27$$

따라서 $\overline{\mathrm{AP}} = 6(\mathrm{cm})$ 일 때 넓이가 최소이다.

15. 지면으로부터 초속 20m 로 위로 던진 공의 x 초 후의 높이를 ym 라고 하면 $y = -5x^2 + 20x$ 인 관계가 성립한다. 이 공이 가장 높이 올라갔을 때의 지면으로부터의 높이를 구하여라.

▶ 답 : ________ m

▷ 정답 : 20 m

해설

$y = -5x^2 + 20x$ 에서 $y = -5(x-2)^2 + 20$ 이다.
따라서 가장 높이 올라갔을 때의 높이는 20m 이다.

16. 지면으로부터 15m 높이에서 초속 40m 로 쏘아 올린 모형 로켓의 x 초 후의 지면으로 부터의 높이를 ym 라고 하면 $y = -5x^2 + 40x + 15$ 인 관계가 성립한다. 이 로켓이 최고 높이에 도달할 때까지 걸린 시간과 그 때의 높이를 구하여라.

▶ 답 : 초

▶ 답 : m

▷ 정답 : 4 초

▷ 정답 : 95 m

해설

$y = -5x^2 + 40x + 15$ 에서 $y = -5(x-4)^2 + 95$ 이다.
따라서 $x = 4$ 일 때, y 는 최댓값 95 를 갖는다.

17. x의 삼차방정식 $x^3+px^2+qx-105=0$의 세 근이 모두 2보다 큰 정수일 때, $p+q$의 값을 구하면?

① 56 ② 21 ③ 10 ④ -10 ⑤ -21

해설

세 근을 α, β, γ 라 하면 근과 계수와의 관계에 의해서
$\alpha+\beta+\gamma=-p$, $\alpha\beta+\beta\gamma+\gamma\alpha=q$, $\alpha\beta\gamma=105$
마지막 식에서 $\alpha\beta\gamma=3\cdot5\cdot7$
$\therefore$ 세 근은 3, 5, 7 이다.
$\therefore\ p=-(3+5+7)=-15$,
$q=3\cdot5+5\cdot7+7\cdot3=15+35+21=71$
$\therefore\ p+q=56$

18. a, b가 실수이고 방정식 $x^3 + ax^2 - 4x + b = 0$의 한 근이 $1 + i$ 일 때, $a + b$의 값은?

① 7 ② 8 ③ 9 ④ 10 ⑤ 11

해설

계수가 실수이므로 $1 + i$가 근이면 $1 - i$도 근이다. 다른 한 근을 α라고 하면삼차방정식의 근과 계수와의 관계에 의해

$(1 + i) + (1 - i) + \alpha = -a \cdots$ ①

$(1 + i)(1 - i) + (1 + i)\alpha + (1 - i)\alpha = -4 \cdots$ ②

$(1 + i)(1 - i)\alpha = -b \cdots$ ③

②에서 $\alpha = -3$

①, ③에 각각 대입하면 $a = 1, b = 6$

$\therefore a + b = 7$

해설

[별해1] 계수가 실수이므로 $1 + i$ 가 근이면 $1 - i$ 도 근이다. 따라서 주어진 방정식의 좌변은$\{x - (1 - i)\}\{x - (1 + i)\} = x^2 - 2x + 2$ 로 나누어 떨어진다. 실제로 나눗셈을 하여 정리하면

$x^3 + ax^2 - 4x + b = (x^2 - 2x + 2)(x + a + 2) + (2a - 2)x + b - 2a - 4$

$\therefore\ 2a - 2 = 0,\ b - 2a - 4 = 0$

$\therefore\ a = 1,\ b = 6$

주어진 방정식에 $1 + i$를 대입하여 복소수의 상등을 이용해도 된다.

19. 삼차방정식 $x^3 = 1$의 한 허근을 w라 할 때, $-\dfrac{w+1}{w^2} + \dfrac{1+w^2}{w}$의 값을 구하면?

① 0　　② 1　　③ -1　　④ 2　　⑤ -2

해설

$x^3 = 1$,

$x^3 - 1 = (x-1)(x^2+x+1) = 0$

ω는 $x^2+x+1=0$의 한 근이 된다.

즉, $\omega^3 = 1$, $\omega^2+\omega+1=0$

$$-\frac{\omega+1}{\omega^2} + \frac{1+\omega^2}{\omega}$$

$$= \frac{\omega^2}{\omega^2} + -\frac{\omega}{\omega}$$

$$= 1 - 1 = 0$$

20. 연립방정식 $\begin{cases} x^2 - xy - 2y^2 = 0 \\ x^2 + y^2 = 10 \end{cases}$ 을 만족하는 x, y에 대하여 x값이 될 수 <u>없는</u> 것은?

① $2\sqrt{2}$ ② $-\sqrt{3}$ ③ $\sqrt{5}$

④ $-2\sqrt{2}$ ⑤ $-\sqrt{5}$

해설

$x^2 - xy - 2y^2 = (x-2y)(x+y) = 0$

㉠ $x = 2y$ 일 때

$(2y)^2 + y^2 = 5y^2 = 10$

$y^2 = 2,$

$y = \pm\sqrt{2}$

$\begin{cases} x = 2\sqrt{2}, y = \sqrt{2} \\ x = -2\sqrt{2}, y = -\sqrt{2} \end{cases}$

㉡ $x = -y$ 일 때

$(-y)^2 + y^2 = 2y^2 = 10,$

$y^2 = 5,$

$y = \pm\sqrt{5}$

$\begin{cases} x = -\sqrt{5}, y = \sqrt{5} \\ x = \sqrt{5}, y = -\sqrt{5} \end{cases}$

21. x에 대한 두 이차방정식 $x^2+ax+5=0$, $x^2+5x+a=0$이 공통근을 갖는 실수 a의 값들의 합을 구하면?

① -2 ② -1 ③ 0 ④ 1 ⑤ 2

해설

공통근을 p라 하면

$p^2+ap+5=0,\ p^2+5p+a=0$

두 식을 빼면, $(a-5)p=a-5$

$(a-5)(p-1)=0$

$\therefore a=5$ 또는 $p=1$

$p=1$이면, $1+a+5=0,\ a=-6$

$\therefore a$의 합 : $-6+5=-1$

22. 두 실수 x, y에 대하여 $x^2 - 4xy + 5y^2 + 2x - 8y + 5 = 0$일 때, $x + y$의 값은?

① 1 ② 2 ③ 3 ④ 4 ⑤ 5

해설

$x^2 - 4xy + 5y^2 + 2x - 8y + 5$
$= x^2 - 2(2y-1)x + 4y^2 - 4y + 1 + y^2 - 4y + 4$
$= x^2 - 2(2y-1)x + (2y-1)^2 + (y-2)^2$
$= (x - 2y + 1)^2 + (y-2)^2 = 0$
$\therefore\ x - 2y + 1 = 0,\ y - 2 = 0$이므로
$y = 2,\ x - 4 + 1 = 0 \quad \therefore\ x = 3$
따라서 $x + y = 3 + 2 = 5$

23. 방정식 $2xy-4x-y=4$를 만족하는 양의 정수 x, y를 구하면 $\begin{cases} x=\alpha \\ y=\beta \end{cases}$,

$\begin{cases} x=\gamma \\ y=\delta \end{cases}$ 이다.

$\alpha+\beta+\gamma+\delta$의 값을 구하여라.

▶ 답 :

▷ 정답 : 15

해설

주어진 식을 변형하면 $(2x-1)(y-2)=6$
조건에서 x, y가 양의 정수이므로
$2x-1$, $y-2$도 각각 정수이고 특히 $2x-1$은 양의 홀수이다.

$\therefore \begin{cases} 2x-1=1 \\ y-2=6 \end{cases}$ 또는 $\begin{cases} 2x-1=3 \\ y-2=2 \end{cases}$

$\therefore \begin{cases} x=1 \\ y=8 \end{cases}$, $\begin{cases} x=2 \\ y=4 \end{cases}$

$\therefore \alpha+\beta+\gamma+\delta=15$

24. A, B 두 사람이 어떤 물건을 3 개월 할부로 공동 구입하였다. 첫달에 A, B 중 한 사람이 다른 사람보다 돈을 많이 지불하였기 때문에 두 번째 달부터는 전달에 많이 지불한 사람은 전달보다 20 % 적은 금액을 지불하고, 적게 지불한 사람은 전 달보다 3000 원 많은 금액을 지불하기로 하였다. 금액을 모두 지불하고보니 A, B는 전체 액수의 반씩을 부담하게 되었다. 이 물건을 사는 데 든 비용은 전부 얼마인가? (단, 두 번째 달의 B의 지불금액은 A의 지불금액보다 6000 원이 많았다.)

① 27000 원　② 30000 원　③ 81000 원

④ 162000 원　⑤ 570000 원

해설

첫달에 A, B가 지불한 금액을 각각 x원, y원이라 하면 각자가 지불한 금액의 총합은 다음과 같다.

$A : x + 0.8x + (0.8x + 3000)$

$B : y + (y + 3000) + 0.8(y + 3000)$

따라서 $x + 0.8x + (0.8x + 3000) = y + (y + 3000) + 0.8(y + 3000) \cdots\cdots$ ㉠

$0.8x + 6000 = y + 3000 \cdots\cdots$ ㉡

또, ㉠, ㉡에서 $x = 30000$, $y = 27000$

따라서, A가 지불한 금액은

$30000 + 0.8 \times 30000 + 0.8 \times 30000 + 3000 = 81000$

그런데 물건을 사는 데 든 총 비용은 한 사람이 지불한 금액의 2 배이다.

$\therefore$ (지불한 총 금액)$= 81000 \times 2 = 162000$(원)

25. 철수는 모든 모서리의 길이의 총합이 40 cm, 겉넓이는 62 cm^2, 부피가 30 cm^3 인 직육면체 모양의 상자를 만들려고 한다. 이 때, 이 상자의 가장 긴 모서리의 길이는 얼마로 해야 하겠는가?

① 3 cm　② 3.5 cm　③ 4 cm　④ 4.5 cm　⑤ 5 cm

해설

각 모서리의 길이를 x, y, z라고 하면
문제의 뜻에서
(ⅰ) $4(x+y+z)=40$
$\therefore\ x+y+z=10$
(ⅱ) $2(xy+yz+zx)=62$
$\therefore xy+yz+zx=31$
(ⅲ) $xyz=30$
따라서, x, y, z는 삼차방정식
$t^3-10t^2+31t-30=0$의 세 근이다.
$(t-2)(t-3)(t-5)=0$
$\therefore t=2,\ 3,\ 5$
이 중 가장 긴 모서리의 길이는 5(cm)이다.