1. 실수 전체의 집합에서 정의된 함수

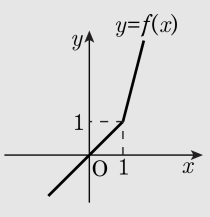
$f(x) = \begin{cases} x & (x \le 1) \\ ax+b & (x > 1) \end{cases}$ 가 일대일대응이 되도록 하는 두 상수 $a,\ b$ 의 값으로 적당한 것은 무엇인가?

① $a=1,\ b=-1$　② $a=1,\ b=1$　③ $a=2,\ b=-1$

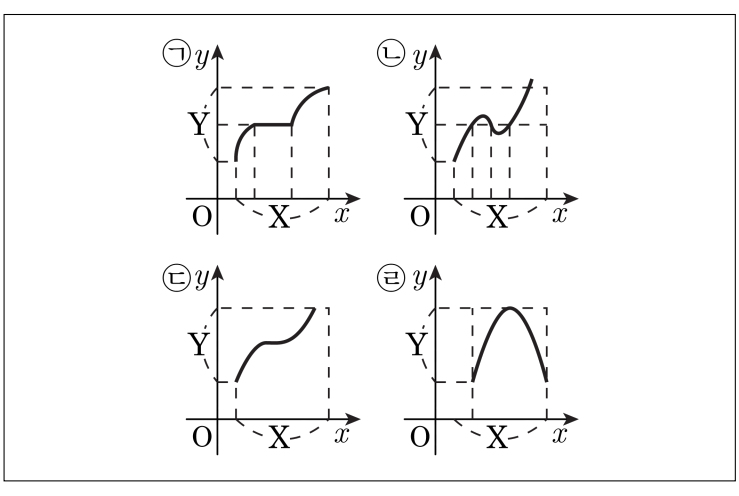
④ $a=2,\ b=0$　⑤ $a=-1,\ b=2$

해설

f가 일대일대응이 되려면
$y=f(x)$의 그래프가 그림과 같아야 한다.
즉, 직선 $y=ax+b$가
점 $(1,\ 1)$을 지나야 하므로
$a+b=1 \quad \cdots$ ㉠
또, 직선 $y=x$의 기울기가 양이므로 직선
$y=ax+b$의 기울기도 양이어야 한다.
$\therefore\ a>0 \quad \cdots$ ㉡
따라서 주어진 보기 중 ㉠, ㉡을
모두 만족시키는 것은 ③이다.



2. 함수 $f : X \to Y$ 의 그래프가 다음과 같다고 한다. 이 중에서 역함수가 존재하는 것은?

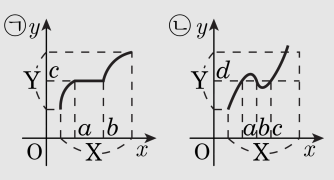


① ㉠, ㉢　　② ㉡, ㉣　　③ ㉢

④ ㉠　　⑤ ㉠, ㉡, ㉣

해설

X 에서 Y 로의 일대일대응을 찾으면 된다.



㉠ : $\{x|a \le x \le b\}$ 에 속하는 x 의 상이 모두 c 이므로 일대일대응이 아니다.

㉡ : $a,\ b,\ c$ 의 상이 모두 d 이므로 일대일 대응이 아니다.

㉣ : ㉡의 경우와 같다.

3. 집합 $X = \{x \mid -1 \le x \le 3\}$에 대하여 X에서 X로의 일차함수 $f(x) = ax + b$의 정의역과 치역이 일치할 때, 두 실수 a와 b의 합 $a + b$의 값을 구하여라.

▶ 답 :

▷ 정답 : 1

해설

1) $a > 0$일 때 $f(-1) = -1,\ f(3) = 3$을 만족
$-a + b = -1,\ 3a + b = 3$
따라서 $a = 1,\ b = 0$
2) $a < 0$일 때 $f(-1) = 3,\ f(3) = -1$
$-a + b = 3,\ 3a + b = -1$
따라서 $a = -1,\ b = 2$
1), 2)에서 $a > 0$일 때 $a + b = 1 + 0 = 1$
$a < 0$일 때 $a + b = -1 + 2 = 1$
즉 $a + b = 1$

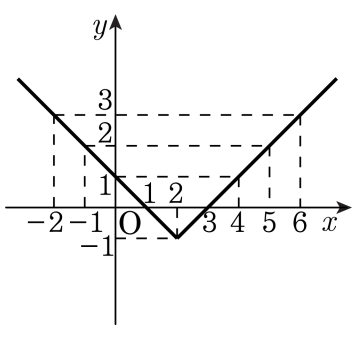
4. 집합 $A = \{-1,\ 0,\ 1\}$ 에 대하여 A 에서 A 로의 함수 f 중 $f(x) = f(-x)$ 를 만족시키는 것의 개수는 몇 개인가?

① 5 개 ② 6 개 ③ 7 개 ④ 8 개 ⑤ 9 개

해설

-1 이 대응할 수 있는 원소는 $-1,\ 0,\ 1$ 의 3 가지
0 이 대응할 수 있는 원소는 $-1,\ 0,\ 1$ 의 3 가지
1 이 대응할 수 있는 원소는
-1 이 대응한 원소 1 가지
따라서, 주어진 조건을 만족시키는
함수 f 의 개수는 $3 \times 3 \times 1 = 9$ (개)

5. 함수 $y = f(x)$ 의 그래프가 다음 그림과 같을 때, 방정식 $f(f(x)) = 0$ 의 모든 근의 합을 구하여라.



▶ 답 :

▷ 정답 : 8

해설

$f(f(x)) = 0$ 에서 $f(x) = X$ 라 하면
$f(X) = 0$ 이므로 $X = 1$ 또는 $X = 3$
$X = 1$ 즉, $f(x) = 1$ 일 때, $x = 0, 4$
$X = 3$ 즉, $f(x) = 3$ 일 때, $x = -2, 6$
따라서, 모든 근의 합은 $0 + 4 + (-2) + 6 = 8$ 이다.

6. 두 다항함수 $f(x) = 2x + 2$, $g(x) = x^2 - 1$에 대하여 $(f^{-1} \circ g)(3)$ 의 값을 구하시오. (단, f^{-1} 는 f 의 역함수이다.)

▶ 답 :

▷ 정답 : 3

해설

$(f^{-1} \circ g)(3) = f^{-1}(g(3)) = f^{-1}(8)$

$f^{-1}(8) = a$ 라 놓으면 $f(a) = 2a + 2 = 8$

$\therefore\ a = f^{-1}(8) = 3$

7. 점 $(6, -2)$를 지나는 일차함수 $y = f(x)$의 그래프와 $y = f^{-1}(x)$의 그래프가 일치할 때, $f(-1)$의 값은?

① 1　　② 2　　③ 3　　④ 4　　⑤ 5

해설

$f = f^{-}1$이므로 $(f \circ f)(x) = x$
$f(x) = a(x-6) - 2 = ax - 6a - 2 (a \neq 0)$로 놓으면
$f(f(x)) = a(ax - 6a - 2) - 6a - 2 = x$
$\therefore a^2x - 6a^2 - 8a - 2 = x$
즉, $a^2 = 1$, $-6a^2 - 8a - 2 = 0$이므로 $a = -1$
따라서 $f(x) = -x + 4$이므로
$f(-1) = -(-1) + 4 = 5$

8. $2+\cfrac{1}{x+\cfrac{1}{y+\cfrac{1}{z}}}=\frac{37}{13}$을 만족시키는 정수 x, y, z에 대하여 $x+y+z$의 값을 구하면?

① 5　　② 6　　③ 7　　④ 8　　⑤ 9

해설

2를 우변으로 이항하고 정리하면

$$\cfrac{1}{x+\cfrac{1}{y+\cfrac{1}{z}}}=\frac{11}{13}$$

역수를 취하면 $x+\cfrac{1}{y+\cfrac{1}{z}}=\frac{13}{11}=1+\frac{2}{11}$

$\therefore x=1$

또, $y+\frac{1}{z}=\frac{11}{2}=5+\frac{1}{2}$

$\therefore y=5, z=2$

따라서 $x+y+z=8$

9. $\frac{a+b}{5}=\frac{2b+c}{4}=\frac{c}{3}=\frac{2a+8b-c}{x}$ 에서 x의 값을 구하시오.

▶ 답 :

▷ 정답 : $x=10$

해설

$$\frac{a+b}{5}=\frac{2b+c}{4}=\frac{c}{3}$$
$$=\frac{2(a+b)+3(2b+c)-4c}{2\times5+3\times4+(-4)\times3}$$
$$=\frac{2a+8b-c}{10}$$
$\therefore x=10$

10. 분수함수 $f(x) = \frac{a}{x}$ 의 그래프가 점 $(a-1,\ 2a)$ 를 지날 때, $1 \le x \le 3$ 에서 함수 $f(x)$ 의 최댓값은? (단, a 는 상수)

① $\frac{1}{2}$　　② 1　　③ $\frac{3}{2}$　　④ 2　　⑤ $\frac{5}{2}$

해설

분수함수 $f(x) = \frac{a}{x}$ 의 그래프가 점 $(a-1,\ 2a)$ 를 지나므로

$2a = \frac{a}{a-1}$, $2a^2 - 3a = 0$, $a(2a-3) = 0$

$\therefore a = \frac{3}{2} (\because a \ne 0)$

따라서 $f(x) = \frac{3}{2x}$ 이므로 $1 \le x \le 3$ 에서

함수 $f(x)$ 는 $x = 1$ 일 때 최댓값 $f(1) = \frac{3}{2}$ 을 가진다.

11. 분수함수 $f(x) = \dfrac{3}{ax-4} + 1$에 대해서 $(f \circ f)(x) = x$가 성립할 때, 상수 a의 값은?

① -5　② -3　③ -2　④ 4　⑤ 5

해설

$(f \circ f)(x) = x$이려면 $f(x) = f^{-1}(x)$ 이어야 한다.
먼저 $f^{-1}(x)$ 를 구해보면,

$$y = \frac{3}{ax-4} + 1$$

$$\Rightarrow x = \frac{3}{a(y-1)} + \frac{4}{a}$$

$$\Rightarrow y = \frac{3}{a(x-1)} + \frac{4}{a} \cdots\cdots f^{-1}(x)$$

$\therefore f(x) = f^{-1}(x)$이려면 $a = 4$

12. 함수 $y = 1 - \sqrt{2-x}$의 그래프에 대한 설명 중 옳은 것은?

① 정의역은 $\{x \mid x \geq 2\}$이다.

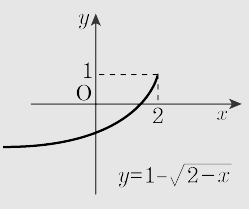
② 치역은 $\{y \mid y \geq 1\}$이다.

③ 그래프는 점 $(-2,\ -1)$ 을 지난다.

④ 그래프는 $y = -\sqrt{x}$ 의 그래프를 평행이동한 것이다.

⑤ 그래프는 제 1, 2, 3사분면을 지난다.

해설



① 정의역은 $\{x \mid x \leq 2\}$이다.
② 치역은 $\{y \mid y \leq 1\}$이다.
④ 그래프는 $y = -\sqrt{-x}$ 의 그래프를 평행이동한 것이다.
⑤ 그래프는 제 1, 3, 4사분면을 지난다.

13. $1 \le x \le a$일 때, $y = \sqrt{2x-1}+3$의 최솟값이 m, 최댓값이 6이다. $a+m$의 값을 구하여라.

▶ 답 :

▷ 정답 : 9

해설

$1 \le x \le a$에서, 함수 $y = \sqrt{2x-1}+3$은 증가함수이므로
$x = 1$ 일때 최솟값을 가진다.
곧, $m = \sqrt{2-1}+3 = 4$
$\therefore m = 4$
또한, $x = a$일 때 최댓값을 가지므로
$6 = \sqrt{2a-1}+3$
$\therefore a = 5$
$\therefore a+m = 9$

14. 무리함수 $y = \sqrt{2x+3}$ 의 그래프가 직선 $y = x + k$ 와 서로 다른 두 점에서 만나기 위한 실수 k 의 값의 범위를 구하면?

① $\frac{3}{2} < k < 2$　② $\frac{3}{2} \le k < 2$　③ $\frac{3}{2} \le k \le 2$
④ $\frac{3}{2} < k \le 2$　⑤ $1 \le k < 2$

해설

(i) 두 그래프가 접할 때, $\sqrt{2x+3} = x + k$의 양변을 제곱하여 정리하면

$x^2 + 2(k-1)x + k^2 - 3 = 0$

이것이 중근을 가지므로

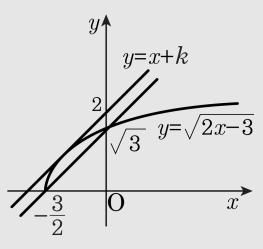
$\frac{D}{4} = (k-1)^2 - (k^2 - 3) = -2k + 4 = 0$

$\therefore\ k = 2$

(ii) 직선 $y = x + k$가 점 $\left(-\frac{3}{2},\ 0\right)$을 지날때

$0 = -\frac{3}{2} + k$

$\therefore\ k = \frac{3}{2}$



(i), (ii)와 위의 그림으로부터 두 그래프가 서로 다른 두 점에서 만날 k 값의 범위는

$\frac{3}{2} \le k < 2$

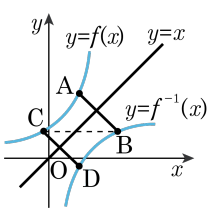
15. 함수 $f(x)=4x-1$의 역함수를 $g(x)$라 할 때, 함수 $f(3x)$의 역함수를 $g(x)$로 나타내면 무엇인가?

① $g\left(\frac{x}{3}\right)$　② $3g(x)$　③ $g(3x)$
④ $\frac{1}{3}g(3x)$　⑤ $\frac{1}{3}g(x)$

해설

$f(x)=4x-1$에서 $f(x)$를 y로 놓고
$y=4x-1$을 x에 관하여 정리하면
$x=\frac{1}{4}y+\frac{1}{4}$
이 때, x와 y를 바꾸면
$f^{-1}(x)=g(x)=\frac{1}{4}x+\frac{1}{4}$
또, $f(3x)=12x-1$에서 $f(3x)=y$로 놓고
$y=12x-1$을 x에 관하여 정리하면
$x=\frac{1}{12}y+\frac{1}{12}$
$\therefore f^{-1}(3x)=\frac{1}{12}x+\frac{1}{12}=\frac{1}{3}\left(\frac{1}{4}x+\frac{1}{4}\right)=\frac{1}{3}g(x)$

16. 다음 그림은 함수 $y = f(x)$와 그 역함수 $y = f^{-1}(x)$의 그래프이다. 점 A의 x좌표가 a일 때, 점 D의 y좌표는?(단, 점선은 x축에 평행하다.)



① $-f^{-1}(a)$　　② $-f(a)$

③ a　　④ $f^{-1}(a)$

⑤ $f^{-1}(f^{-1}(a))$

해설

A$(a,\ f(a))$로 놓으면 점 B는
점 A와 직선 $y = x$에 대하여 대칭이므로 B$(f(a),\ a)$이다.
또, 점 C는 점 B와 y좌표가 같으므로 C$(x,\ a)$로 놓으면 $f(x) = a$이므로
$x = f^{-1}(a)$　　$\therefore C(f^{-1}(a),\ a)$
그런데 점 D는 점 C와 직선 $y = x$에 대하여 대칭이므로
D$(a,\ f^{-1}(a))$
따라서, 점 D의 y좌표는 $f^{-1}(a)$이다.

17. 분수함수 $y = \dfrac{x-4}{x-3}$ 의 정의역이 $\{x \mid x \geq 0\}$ 일 때, 다음 중 치역을 바르게 구한 것은?

① $\left\{y \mid -\dfrac{4}{3} < y < 1\right\}$

② $\left\{y \mid \dfrac{4}{3} \leq y < -1\right\}$

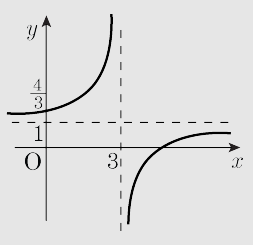
③ $-1 \leq y < \dfrac{4}{3}$ 을 제외한 실수 전체

④ $1 \leq y < \dfrac{4}{3}$ 을 제외한 실수 전체

⑤ $-\dfrac{4}{3} \leq y \leq 1$ 을 제외한 실수 전체

해설

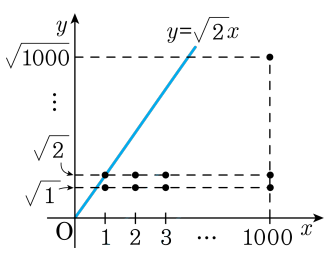
$y = \dfrac{x-4}{x-3} = \dfrac{x-3-1}{x-3} = 1 + \dfrac{-1}{x-3}$



$x = 0$ 일 때, $y = \dfrac{-4}{-3} = \dfrac{4}{3}$ 이므로,

치역은 $1 \leq y < \dfrac{4}{3}$ 을 제외한 실수 전체

18. 평면 위에 좌표가 $(p,\ \sqrt{q})$ 인 위치에 점들이 찍혀 있다. 원점을 지나고 기울기가 $\sqrt{2}$ 인 직선을 그을 때, 몇 개의 점들을 통과하는가? (단, $p = 1,\ 2,\ 3, \cdots,\ 1000,\ q = 1,\ 2,\ 3, \cdots,\ 1000$)



① 20 개　② 21 개　③ 22 개　④ 23 개　⑤ 24 개

해설

$\sqrt{q} = \sqrt{2}p$가 성립하는 자연수 $p,\ q$의 쌍을 구한다.

$1 \le p \le 1000,\ 1 \le q \le 1000,\ q = 2p^2$ 에서

$1 \le 2p^2 \le 1000$

$\therefore \sqrt{\frac{1}{2}} \le p \le \sqrt{\frac{1000}{2}}$

p는 자연수이므로 $p = 1,\ 2,\ 3, \cdots,\ 22$

따라서, 22개다.

19. 다음 보기 중 $X = \{-1,\ 1,\ 2\}$에서 $Y = \{1,\ 2,\ 3,\ 4\}$로의 함수가 될 수 있는 것은 몇 개인가?

<보기>

㉠ $f : x \rightarrow |x|^2$　　㉡ $g : x \rightarrow x+2$

㉢ $h : x \rightarrow |x|+1$　　㉣ $i : x \rightarrow x^2-1$

㉤ $j : x \rightarrow |x|+3$

① 1개　② 2개　③ 3개　④ 4개　⑤ 5개

해설

㉠ $f(-1) = |-1|^2 = 1 \in Y$
$f(1) = |1|^2 = 1 \in Y$
$f(2) = |2|^2 = 4 \in Y$
㉡ $g(-1) = -1+2 = 1 \in Y$
$g(1) = 1+2 = 3 \in Y$
$g(2) = 2+2 = 4 \in Y$
㉢ $h(-1) = |-1|+1 = 2 \in Y$
$h(1) = |1|+1 = 2 \in Y$
$h(2) = |2|+1 = 3 \in Y$
㉣ $i(-1) = i(1) = 0 \notin Y$
㉤ $j(2) = 5 \notin Y$
그러므로 ㉣, ㉤은 함수가 될 수 없고 ㉠, ㉡, ㉢ 3개 만 함수가 될 수 있다.

20. 무리식 $\sqrt{6-\sqrt{6-\sqrt{6-\sqrt{6-}}}}\cdots = p$, $2-\cfrac{1}{2-\cfrac{1}{2-\cfrac{1}{2-\cfrac{1}{\ddots}}}} = q$

라 할 때, $p+q$ 의 값을 구하라.

▶ 답 :

▷ 정답 : 3

해설

(i) $\sqrt{6-\sqrt{6-\sqrt{6-\sqrt{6}}}}\cdots = x$ 라 두면

$\sqrt{6-x} = x$ 양변을 제곱하면

$x^2 = 6-x,\ x^2+x-6=0,\ (x+3)(x-2)=0$

$\therefore x = -3,\ 2$

여기서 $x>0$ 이므로 $x=2$

$\therefore p = 2$

(ii) 주어진 식을 a 라 하면

$2-\dfrac{1}{a} = a,\ a^2-2a+1=0,\ (a-1)^2=0$

$\therefore a = 1 \qquad \therefore q = 1$

$\therefore p+q = 3$