1. 다음 식을 간단히 하면?

$$\sqrt[3]{-8}+\sqrt{(-2)^2}+\sqrt{-8}\sqrt{-2}$$
$$+\frac{\sqrt{-16}}{\sqrt{-4}}+\frac{\sqrt{3}}{\sqrt{-2}}+\frac{\sqrt{-3}}{\sqrt{2}}$$

① -2 ② -1 ③ 0 ④ 1 ⑤ 2

해설

(주어진 식)

$= \sqrt[3]{(-2)^3}+\sqrt{4}+\sqrt{8}i\cdot\sqrt{2}i$

$\quad +\frac{\sqrt{16}i}{\sqrt{4}i}+\frac{\sqrt{3}}{\sqrt{2}i}+\frac{\sqrt{3}i}{\sqrt{2}}$

$=-2+2+\sqrt{8\cdot 2}i^2+\sqrt{\frac{16}{4}}-\frac{\sqrt{6}}{2}i+\frac{\sqrt{6}}{2}i$

$=-2+2-4+2$

$=-2$

※ 참고

$\sqrt{a}\sqrt{b}=\sqrt{ab}$, $\frac{\sqrt{a}}{\sqrt{b}}=\sqrt{\frac{a}{b}}$가 항상 성립하는 a, b의 부호를 생각해 보자.

$\sqrt{a}\sqrt{b}=\sqrt{ab}$ 이므로

$\sqrt{-2}\sqrt{-3}=\sqrt{(-2)(-3)}=\sqrt{6}$이 된다고 계산할 수도 있다.

그러나 조심해야 할 것은 공식에서 주어지는 조건들이다.

즉, $a<0$, $b<0$일 때를 제외한 경우에만 $\sqrt{a}\sqrt{b}=\sqrt{ab}$가 성립한다.

마찬가지로 $\frac{\sqrt{10}}{\sqrt{-5}}=\sqrt{-\frac{10}{5}}=\sqrt{-2}=\sqrt{2}i$라고 함부로 계산해서는 안 된다.

왜냐하면 $a>0$, $b<0$일 때를 제외한 경우에만 $\frac{\sqrt{a}}{\sqrt{b}}=\sqrt{\frac{a}{b}}$가 성립하기 때문이다.

2. 등식 $2x+(y+1)i=6-i$를 만족하는 실수 $x,\ y$의 값은?

① $x=3,\ y=-2$　② $x=3,\ y=0$　③ $x=4,\ y=-2$
④ $x=4,\ y=0$　⑤ $x=-1,\ y=4$

해설
$(2x-6)+(y+2)i=0$
$x,\ y$는 실수이므로, $2x-6=0,\quad y+2=0$
$\Rightarrow x=3,\quad y=-2$

3. $(4+3i)^2-(4-3i)^2$ 의 값은?

① 0 ② 24 ③ 48 ④ $24i$ ⑤ $48i$

해설

$(4+3i)^2-(4-3i)^2$
$=16+24i-9-(16-24i-9)$
$=48i$

4. $i+i^2+i^3+i^4+i^5$을 간단히 하면?(단, $i=\sqrt{-1}$)

① i　② $-i$　③ $1+i$　④ 0　⑤ 1

해설

$i^2=-1,\ i^3=i^2\times i=-i,\ i^4=(i^2)^2=(-1)^2=1,$
$i^5=i^4\times i=i$
$i+i^2+i^3+i^4+i^5$
$=i+(-1)+(-i)+1+i=i$

5. $x = 2 - \sqrt{3}i$, $y = 2 + \sqrt{3}i$ 일 때, $x^2 + y^2$ 의 값을 구하시오.

▶ 답 :

▷ 정답 : 2

해설

$$
\begin{aligned}
x^2 + y^2 &= (2 - \sqrt{3}i)^2 + (2 + \sqrt{3}i)^2 \\
&= 4 - 4\sqrt{3}i - 3 + 4 + 4\sqrt{3}i - 3 \\
&= 2
\end{aligned}
$$

해설

$$
\begin{aligned}
x^2 + y^2 &= (x + y)^2 - 2xy \\
&= 4^2 - 2 \cdot 7 \\
&= 16 - 14 \\
&= 2
\end{aligned}
$$

6. 다음 복소수에 대한 설명 중 옳지 않은 것은?

① -5의 제곱근은 $\pm\sqrt{5}i$이다.

② $2+3i$의 실수부분은 2, 허수부분은 3 이다.

③ $-3i$는 순허수이다.

④ $1-2i$의 켤레 복소수는 $-1+2i$이다.

⑤ 두 실수 a, b에 대하여 복소수 $a+bi$가 실수가 되려면 $b=0$이어야 한다.

해설

④ $1-2i$의 켤레 복소수는 $1+2i$이다.

7. $x = 3 + 2i$ 일 때, $x^2 - 6x - 10$ 의 값을 구하시오.

▶ 답 :

▷ 정답 : -23

해설

$x = 3 + 2i$ 에서 $x - 3 = 2i$ 의 양변을 제곱하면

$(x - 3)^2 = (2i)^2 \quad \therefore \ x^2 - 6x = -13$

$x^2 - 6x - 10 = -13 - 10 = -23$

$\therefore \ -23$

8. $\dfrac{\sqrt{a}}{\sqrt{b}} = -\sqrt{\dfrac{a}{b}}$ 일 때, 다음 중 옳은 것은?

① $a \geq 0,\ b < 0$ ② $a > 0,\ b > 0$ ③ $a \geq 0,\ b > 0$
④ $a < 0,\ b < 0$ ⑤ $a \leq 0,\ b < 0$

해설

$\dfrac{\sqrt{a}}{\sqrt{b}} = -\sqrt{\dfrac{a}{b}}$ 가 성립할 조건은 $b < 0$ 이고 $a \geq 0$ 일 때이다.

9. 실수 x, y에 대하여, 등식 $2x+y+(x-3y)i=3+2i$가 성립할 때, $\frac{x}{y}$의 값을 구하면?

① $-\frac{1}{11}$ ② 11 ③ 7 ④ -7 ⑤ -11

해설

$2x+y=3,\ x-3y=2$ 이므로

$x=\frac{11}{7}$, $y=-\frac{1}{7}$

$\therefore\ \frac{x}{y}=\frac{11}{7}\times-\frac{7}{1}=-11$

10. 실수 $x,\ y$에 대하여 $(1+i)x+(i-1)y=2i$일 때, $x+y$의 값은? (단, $i=\sqrt{-1}$)

① 1　　② 2　　③ 3　　④ 4　　⑤ 5

해설

$(1+i)x+(i-1)y=2i$

$(x-y)+(x+y)i=2i$

좌변과 우변이 같아야 하므로, $x-y=0,\ x+y=2$

두 식을 연립하여 풀어주면, $\therefore\ x=1,\ y=1$

$\therefore\ x+y=2$

11. $i+i^3+i^5+i^7+\cdots+i^{101}=a+bi$ 일 때, $a+b$ 의 값은? (단, a, b 는 실수)

① 0 ② 1 ③ 2 ④ 3 ⑤ 4

해설

(좌변)$=i-i+i-i+\cdots+i=i$ 이므로
$i=a+bi$ 에서 복소수가 서로 같을 조건에 의하여 $a=0$, $b=1$
$\therefore\ a+b=1$

12. $j^2 = -\sqrt{-1}$ 라 할 때, j^{2012} 의 값은?

① 1　　② -1

③ $\sqrt{-1}$　　④ $-\sqrt{-1}$

⑤ 두 개의 값을 갖는다.

해설

$j^4 = (-\sqrt{-1})^2 = (\sqrt{-1})^2 = -1$

$\therefore\ j^{2012} = (j^4)^{503} = (-1)^{503} = -1$

13. $z=\dfrac{2}{1-i}$ 일 때, $2z^2-4z-1$ 의 값을 구하면?

① -1 ② 2 ③ -3 ④ 4 ⑤ -5

해설

$z=\dfrac{2}{1-i}=1+i$

$\therefore\ 2z^2-4z-1\ =2(1+i)^2-4(1+i)-1$

$=4i-4-4i-1$

$=\ -5$

해설

$z=1+i, z-1=i$

양변을 제곱하고 정리하면

$z^2-2z=-2$

$2z^2-4z-1$

$=2(z^2-2)z-1$

$=-4-1=-5$

14. $z=1-i$ 일 때, $\dfrac{\overline{z}-1}{z}-\dfrac{z-1}{\overline{z}}$ 의 값은?

① $-i$ ② i ③ $-2i$ ④ $2i$ ⑤ 1

해설

$z=1-i, \overline{z}=1+i$

$\therefore$ (준식) $=\dfrac{i}{1-i}-\dfrac{-i}{1+i}=\dfrac{2i}{2}=i$

15. 복소수 $z = 1 - i$ 라고 할 때, $wz + 1 = \overline{w}$ 를 만족하는 복소수 w 의 실수부분을 구하면? (단, $\overline{w}$ 는 w 의 켤레복소수이다.)

① -2 ② -1 ③ 1 ④ $\frac{1}{2}$ ⑤ 2

해설

$w = a + bi$ 라 하면

$$\begin{aligned}(a+bi)(1-i)+1 &= a - ai + bi + b + 1 \\ &= (a+b+1) - (a-b)i \\ &= a - bi \text{ 에서}\end{aligned}$$

$a + b + 1 = a$, $\therefore$ $b + 1 = 0$ 이므로 $b = -1$

$a - b = b$ 이므로 $a + 1 = -1$ 에서 $a = -2$

따라서 w 의 실수부분은 -2

16. 등식 $(1+i)z+(2z-3i)i=0$ 을 만족하는 복소수 z 는?

① $3+9i$ ② $-3+9i$ ③ $3-9i$

④ $\frac{3}{10}-\frac{9}{10}i$ ⑤ $-\frac{3}{10}+\frac{9}{10}i$

해설

$z=a+bi$ ($a,\ b$ 는 실수) 로 놓으면

$(1+i)(a+bi)+\left\{2(a+bi)-3i\right\}i=0$

$(a+bi+ai-b)+(2ai-2b+3)=0$

$(a-3b+3)+(3a+b)i=0$

복소수가 서로 같을 조건에 의하여

$a-3b+3=0$, $3a+b=0$

두 식을 연립하여 풀면

$a=-\frac{3}{10}$, $b=\frac{9}{10}$

$\therefore\ z=-\frac{3}{10}+\frac{9}{10}i$

17. 제곱해서 $5-12i$ 가 되는 복소수는?

① $\pm(2+3i)$　② $\pm(2-3i)$　③ $\pm(3-2i)$

④ $\pm(3+3i)$　⑤ $\pm(3+3i)$

해설

구하려는 복소수를 $a+bi$ ($a,\ b$ 는 실수)로 놓으면

$(a+bi)^2 = a^2-b^2+2abi$ 에서

$a^2-b^2+2abi = 5-12i$

복소수가 서로 같을 조건에 의하여

$a^2-b^2=5$, $2ab=-12$ 에서

$ab=-6$, $b=-\frac{6}{a}$ 이므로

$a^2-\left(-\frac{6}{a}\right)^2=5$, $a^2-\frac{36}{a^2}=5$

양변에 a^2 을 곱하면

$a^4-5a^2-36=0,\ (a^2-9)(a^2+4)=0$

따라서 $a^2=9$ 또는 $a^2=-4$ 이므로

$a=\pm3$ 또는 $a=\pm2i$

그런데 a 는 실수이므로 $a=\pm3$ 이고, $b=\mp2$ 이다.

따라서 구하는 복소수는 $\pm(3-2i)$ 이다.

18. 복소수 $(1+i)x^2-(1-4i)x-(2-3i)$가 실수일 때의 x값과 순허수일 때의 x값을 모두 곱한 값을 구하여라.

▶ 답:

▷ 정답: 6

해설

준식을 전개하여 실수부와 허수부로 정리하면
$(x^2-x-2)+(x^2+4x+3)i$
실수가 되기위해서는 $x^2+4x+3=0$
$(x+1)(x+3)=0 \therefore\ x=-3,\ -1$
순허수가 되기 위해서는
$x^2-x-2=0$이고 $x^2+4x+3\neq 0$
$x=-1,\ 2$이고 $x\neq -3,\ -1 \therefore\ x=2$
$(-3)\times(-1)\times 2=6$

19. $a^2(1+i)+a(2+i)-8-6i$가 순허수가 되도록 실수 a의 값을 구하면?

① -10 ② -8 ③ -6 ④ -4 ⑤ -2

해설

$a^2(1+i)+a(2+i)-8-6i$
$=(a^2+2a-8)+i(a^2+a-6)$
$=(a+4)(a-2)+i(a+3)(a-2)$
만약에 $a=2$가 되면 실수가 된다.
$a \neq 2$, $\therefore\ a=-4$

20. 복소수 $z=(1+i)x+1-2i$에 대하여 z^2이 음의 실수일 때, 실수 x의 값을 구하여라.

▶ 답 :

▷ 정답 : $x=-1$

해설

$z = (1+i)x+1-2i = (x+1)+(x-2)i$

z^2의 음의실수 ⇔ z가 순허수

$\therefore\ x+1=0,\ \ x=-1$

21. x, y가 양의 실수이고, $x^2+xyi+y^2-5-2i=0$일 때, $x+y$의 값을 구하여라.(단, $i=\sqrt{-1}$)

▶ 답:

▷ 정답: 3

해설

실수부와 허수부로 나눈다.

$(x^2+y^2-5)+(xy-2)i=0$

$x^2+y^2-5=0\cdots$㉠

$xy-2=0\cdots$㉡

㉠, ㉡을 연립하면

$(x+y)^2=x^2+y^2+2xy=5+4=9$

$\therefore\ x+y=3$ ($\because$ x, y는 양의 실수)

22. 복소수 z 와 그 켤레복소수 $\overline{z}$ 에 대하여 $z - \overline{z} = 2i$, $\frac{\overline{z}}{z} = -i$ 가 성립할 때, $z \cdot \overline{z}$ 의 값은?

① 1　　② 2　　③ 5　　④ 8　　⑤ 13

해설

$z = a + bi$ ($a,\ b$ 는 실수) 로 놓으면 $\overline{z} = a - bi$

$z - \overline{z} = 2i$ 에서 $a + bi - (a - bi) = 2i$, $2bi = 2i$

$\therefore\ b = 1$

$\frac{\overline{z}}{z} = -i$ 에서 $\frac{a-i}{a+i} = -i$

$\frac{(a-i)^2}{a^2+1} = -i$, $\frac{a^2-1-2ai}{a^2+1} = -i$

복소수가 서로 같을 조건에 의하여

(i) 실수부분이 0 이어야 하므로

$\frac{a^2-1}{a^2+1} = 0$, $a^2 - 1 = 0$

$\therefore a = \pm 1 \quad \cdots ㉠$

(ii) 허수부분이 -1 이어야 하므로

$\frac{-2a}{a^2+1} = -1$, $a^2 + 1 = 2a$

$a^2 - 2a + 1 = 0$, $(a-1)^2 = 0$

$\therefore a = 1 \quad \cdots ㉡$

따라서 ㉠, ㉡에 의하여 $a = 1$

$\therefore\ z \cdot \overline{z} = (1+i)(1-i) = 1 + 1 = 2$

23. 복소수 z 에 대하여 다음 보기 중 항상 실수인 것을 모두 고르면?(단, $\bar{z}$ 는 z 의 켤레복소수이고 $z \neq 0$ 이다

㉠ $z+\bar{z}$	㉡ $z\bar{z}$	㉢ $(z-\bar{z})^2$
㉣ $\frac{1}{z}-\frac{1}{\bar{z}}$	㉤ $\frac{\bar{z}}{z}$	

① ㉠
② ㉠ ,㉡
③ ㉠ ,㉡ ,㉢
④ ㉠ ,㉡ ,㉢ ,㉣
⑤ ㉠ ,㉡ ,㉢ ,㉣ ,㉤

해설

$z=a+bi$ 라 하자 $\Rightarrow$ $\bar{z}=a-bi$

㉠ $z+\bar{z}=2a$

㉡ $z\bar{z}=(a+bi)(a-bi)=a^2+b^2$

㉢ $(z-\bar{z})^2=(2bi)^2=-4b^2$

㉣ $\frac{1}{z}-\frac{1}{\bar{z}}=\frac{a-bi}{a^2+b^2}-\frac{a+bi}{a^2+b^2}=\frac{-2bi}{a^2+b^2}$

㉤ $\frac{\bar{z}}{z}=\frac{(a-bi)^2}{a^2+b^2}$

24. 방정식 $x^2+x+1=0$ 의 한 근을 w 라 할 때, $z=\dfrac{3w+1}{w+1}$ 이라 하면, $z\bar{z}$ 의 값은?
(단, $\bar{z}$ 는 z 의 켤레복소수)

① 7　② 6　③ 5　④ 4　⑤ 3

해설

$x^2+x+1=0$ 의 한 근을 w 라 하면, 다른 근은 $\overline{w}$ 이다.

$w+\overline{w}=-1,\ w\overline{w}=1$

$$\begin{aligned} z\bar{z} &= \frac{3w+1}{w+1}\cdot\frac{3\overline{w}+1}{\overline{w}+1} \\ &= \frac{9w\overline{w}+3(w+\overline{w})+1}{w\overline{w}+(w+\overline{w})+1} \\ &= 7 \end{aligned}$$

25. 복소수 $\alpha = a + bi$ ($a,\ b$ 는 실수) 에 대하여 $\alpha^* = b + ai$ 로 나타낸다.$\alpha = \dfrac{4+3i}{5}$ 일 때, $5\alpha^5(\alpha^*)^4$ 의 값을 구하면?

① $4+3i$　　② $3+3i$　　③ $2+3i$

④ $1+3i$　　⑤ $-1+3i$

해설

$$\begin{aligned}\alpha\alpha^* &= (a+bi)(b+ai)\\ &= ab + a^2 i + b^2 i - ab = (a^2+b^2)i\end{aligned}$$

$\alpha = \dfrac{4+3i}{5}$ 이므로 $\alpha\alpha^* = \left\{\left(\dfrac{4}{5}\right)^2 + \left(\dfrac{3}{5}\right)^2\right\} i = i$

$$\begin{aligned}\therefore\ 5\alpha^5(a^*)^4 &= 5\alpha(\alpha\cdot a^*)^4\\ &= 5\cdot\frac{4+3i}{5}\cdot i^4\\ &= 4+3i\end{aligned}$$