1. $\sqrt{59+a}=b$라 할 때, b가 자연수가 되도록 하는 가장 작은 자연수 a와 그 때의 b의 합 $a+b$의 값은?

① 11　② 12　③ 13　④ 14　⑤ 15

해설

59 보다 큰 제곱수는 $64, 81, 100, \cdots$ 이므로
$59+a=64, 81, 100\cdots$
$\therefore a=5, 22, 41, \cdots$
따라서 가장 작은 자연수 $a=5$, $b=\sqrt{59+5}=8$이다.
$\therefore a+b=5+8=13$

2. $f(x) = \sqrt{x+1} - \sqrt{x}$이고, $S(x) = f(1) + f(2) + f(3) + \cdots + f(x)$이라고 한다. 100 이하의 자연수 n에 대하여 $S(n)$의 값이 자연수가 되는 n을 모두 고르면?

① 8　　② 15　　③ 35　　④ 50　　⑤ 99

해설

$S(n) = \left(\sqrt{2} - 1\right) + \left(\sqrt{3} - \sqrt{2}\right) + \left(\sqrt{4} - \sqrt{3}\right) + \dots + \left(\sqrt{n+1} - \sqrt{n}\right) = \sqrt{n+1} - 1$

① $n = 8$일 때, $S(n) = 3 - 1 = 2$
② $n = 15$일 때, $S(n) = 4 - 1 = 3$
③ $n = 35$일 때, $S(n) = 6 - 1 = 5$
④ $n = 50$일 때, $S(n) = \sqrt{51} - 1$
⑤ $n = 99$일 때, $S(n) = 10 - 1 = 9$
따라서 ①, ②, ③, ⑤가 답이다.

3. 다음 중 $(x^2+2x)^2-11(x^2+2x)+24$ 의 인수가 아닌 것은?

① $x+4$ ② $x+3$ ③ $x+2$ ④ $x-1$ ⑤ $x-2$

해설

$x^2+2x=A$ 로 치환하면

(준식) $=A^2-11A+24=(A-3)(A-8)$ 이다.

따라서

$(x^2+2x-3)(x^2+2x-8)$

$=(x+3)(x-1)(x-2)(x+4)$

4. 두 개의 이차방정식 $x^2 + ax + 2 = 0$ 과 $x^2 - 2x - a = 0$ 은 단 한 개의 공통 해를 갖는다고 한다. 이 때, 공통 해와 양의 실수 a 의 값을 구하면?

① $x = 2,\ a = -3$
② $x = 2,\ a = 3$
③ $x = 1,\ a = 3$
④ $x = -1,\ a = -3$
⑤ $x = -1,\ a = 3$

해설

두 방정식의 공통인 해를 α 라 하고 $x = \alpha$ 를 두 방정식에 각각 대입하면

$\alpha^2 + a\alpha + 2 = 0 \cdots$ ㉠ , $\alpha^2 - 2\alpha - a = 0 \cdots$ ㉡

㉠ − ㉡하면

$(a+2)\alpha + (a+2) = 0, (a+2)(\alpha+1) = 0$

$a = -2$ 또는 $\alpha = -1$ 에서 $a > 0$ 이므로 $\alpha = -1$

$\alpha = -1$을 ㉠에 대입하면

$1 - a + 2 = 0 \quad \therefore a = 3$

5. 밑면의 반지름의 길이가 7cm 이고 높이가 $h$cm 인 원기둥이 있다. 이 원기둥의 반지름의 길이를 조금 줄였더니 원기둥의 부피가 처음보다 64% 감소했을 때, 줄인 반지름의 길이는?

① 2.5cm ② 2.6cm ③ 2.7cm
④ 2.8cm ⑤ 2.9cm

해설

반지름의 줄인 길이를 $x$cm 라 하면
원래 원기둥의 부피는 $7^2\pi h$ cm
나중 원기둥의 부피는 $(7-x)^2\pi h$ cm
부피가 64% 감소했으므로
$(7-x)^2\pi h = 0.36 \times 7^2\pi h$
$(7-x)^2 = (0.6 \times 7)^2$
$x > 0$ 이므로 $7 - x = 4.2$
$\therefore x = 2.8(\text{cm})$

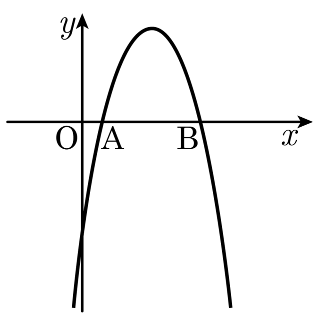
6. 이차함수 $y = x^2 - 5x + k$ 의 그래프가 x 축과 만나는 점을 각각 P, Q 라 할 때, 점 P 에서 점 Q 사이의 거리가 9 일 때, 이 포물선의 y 절편을 구하여라.

① -14 ② -7 ③ -1 ④ 4 ⑤ 45

해설

점 P 의 좌표 a 라 하면 Q 좌표는 $a+9$
두 근의 합은 5
$\therefore\ a + (a+9) = 5,\ a = -2$
$\therefore$ 두 점은 $(-2,\ 0),\ (7,\ 0)$
두 근의 곱은 $k = (-2) \times 7 = -14$

7. 다음은 이차함수 $y=-x^2+6x+k$ 의 그래프이다. $\overline{AB}=4$ 일 때, 이 이차함수의 최댓값은?



① 1 ② 2 ③ 3 ④ 4 ⑤ 5

해설

$y=-x^2+6x+k=-(x-3)^2+k+9$ 에서
축의 방정식은 $x=3$ 이다.
그림에서 보듯 $\overline{AB}=4$ 이면 점 A , B 는 축 $x=3$ 에서 각각 2 만큼 떨어져 있다.
$\therefore$ A(1, 0), B(5, 0)
구하는 식은 $y=-(x-1)(x-5)=-x^2+6x-5$
$\therefore k=-5$
$y=-(x-3)^2+4$
$\therefore x=3$ 에서 최댓값 4

8. 자연수 a, b, c에 대하여 가로의 길이, 세로의 길이, 높이가 각각 $\sqrt{a}$, $\sqrt{b}$, $\sqrt{c}$ 인 직육면체의 부피가 $6\sqrt{5}$일 때, 이 직육면체의 겉넓이의 최댓값을 구하여라. (단, $a \le b \le c$)

① $1+2\sqrt{5}$ ② $2+\sqrt{3}$ ③ $2+12\sqrt{3}$
④ $2+21\sqrt{5}$ ⑤ $2+24\sqrt{5}$

해설

부피는 $\sqrt{abc} = 6\sqrt{5} = \sqrt{180}$

$\therefore\ abc = 180 = 2^2 \times 3^2 \times 5$

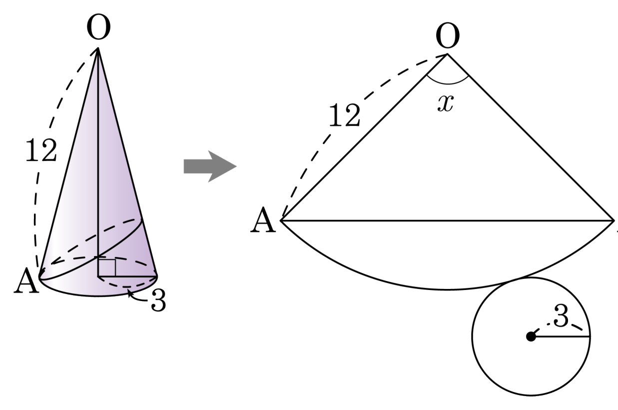
한편 직육면체의 겉넓이는

$2(\sqrt{ab}+\sqrt{bc}+\sqrt{ca})$ 이고

$\sqrt{ab}+\sqrt{bc}+\sqrt{ca}$가 최댓값을 갖기 위한 자연수 a, b, c의 순서쌍은 $(1,\ 1,\ 180)$ 이므로

$$\begin{aligned}\therefore (\text{직육면체의 겉넓이}) &= 2(\sqrt{ab}+\sqrt{bc}+\sqrt{ca}) \\ &= 2(1+\sqrt{180}+\sqrt{180}) \\ &= 2(1+6\sqrt{5}+6\sqrt{5}) \\ &= 2(1+12\sqrt{5}) \\ &= 2+24\sqrt{5}\end{aligned}$$

9. 다음 그림과 같이 모선의 길이가 12 이고, 밑면의 원의 반지름의 길이가 3 인 원뿔이 있다. 이 원뿔의 밑면의 한 점 A 에서 옆면을 지나 다시 점 A 에 이르는 최단 거리를 구하기 위해 전개도를 그린 것이다. 중심각 x 의 크기와 최단거리가 바르게 짝지어진 것은?



① 60°, 12cm　② 60°, $12\sqrt{2}$cm　③ 90°, 12cm
④ 90°, $12\sqrt{2}$cm　⑤ 120°, 12cm

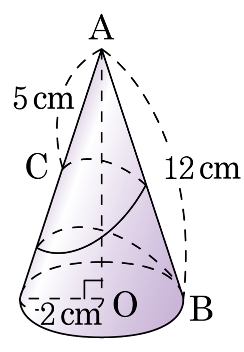
해설

전개도에서 점 A 와 A′ 사이의 최단 거리는 선분 AA′ 이다.
전개도에서 부채꼴의 중심각의 크기 x는

$x = \frac{3}{12} \times 360° = 90°$,

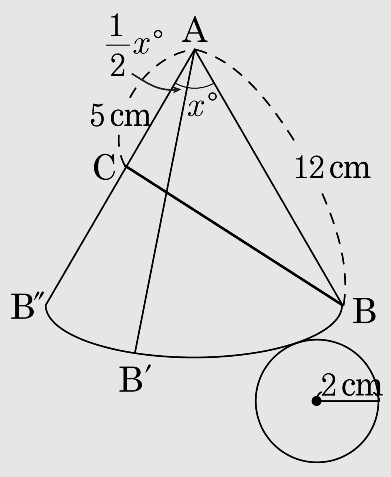
최단거리 $\overline{AA'} = 12\sqrt{2}$cm 이다.

10. 다음 그림과 같이 밑면의 반지름의 길이가 2cm 이고 모선의 길이가 12cm 인 원뿔에서 점 P 가 밑면의 점 B 를 출발하여 원뿔의 옆면을 따라 모선 위의 점 C 까지 한 바퀴 반을 돌아서 이동한다. 이때, 점 P 가 움직인 최단 거리는?



① 12 cm ② 13 cm ③ 14 cm ④ 15 cm ⑤ 17 cm

해설



1) 부채꼴의 중심각을 구하는 공식은

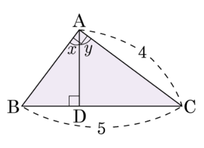
중심각 $= \dfrac{\text{밑면의 반지름}}{\text{모선}} \times 360°$ 이므로

$x = \dfrac{2}{12} \times 360°,\ x = 60°$

$\therefore \angle \mathrm{B''AB} = 90°$

2) $\overline{\mathrm{CB}}$ 의 최단 거리는 $\sqrt{5^2 + 12^2} = 13\,\mathrm{cm}$이다.

11. 다음 그림의 직각삼각형 ABC 에서 $\angle\mathrm{BAD} = x$, $\angle\mathrm{DAC} = y$ 라 할 때, $12(\tan x + \tan y)$ 의 값은?



① 10　　② 12　　③ 15　　④ 20　　⑤ 25

해설

$\triangle\mathrm{CAB} \backsim \triangle\mathrm{DAB} \backsim \triangle\mathrm{DAC}$(AA 닮음)

$\overline{\mathrm{AB}} = \sqrt{5^2 - 4^2} = 3$

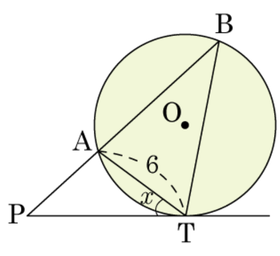
$\angle x = \angle\mathrm{C}$, $\angle y = \angle\mathrm{B}$ 이므로

$\tan x = \dfrac{\overline{\mathrm{AB}}}{\overline{\mathrm{AC}}} = \dfrac{3}{4}$, $\tan y = \dfrac{\overline{\mathrm{AC}}}{\overline{\mathrm{AB}}} = \dfrac{4}{3}$

$\therefore \tan x + \tan y = \dfrac{3}{4} + \dfrac{4}{3} = \dfrac{25}{12}$

$12(\tan x + \tan y) = 12 \times \dfrac{25}{12} = 25$

12. 다음 그림과 같이 원 O 에서 $\overrightarrow{\mathrm{PT}}$ 는 접선이고, $\overline{\mathrm{AT}}=6$, $\tan x=\frac{3}{4}$ 일 때, 원 O 의 반지름의 길이는?

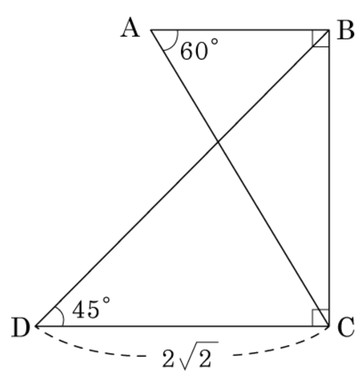


① 3　　② 4　　③ 5
④ 6　　⑤ 7

해설

$\tan x=\frac{3}{4}$ 이므로 $\sin x=\frac{3}{5}$ 이다.
원 O 의 반지름을 r 이라 하면, $x=\angle\mathrm{ABT}$ 이므로
$\sin x=\frac{6}{2r}=\frac{3}{5}$ 이므로 원의 반지름은 5 이다.

13. 다음 그림에서 $\overline{AB}$ 의 길이는?



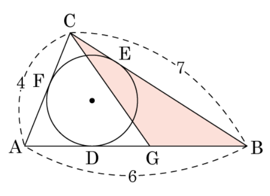
① $\frac{7\sqrt{6}}{3}$　② $\frac{5\sqrt{6}}{3}$　③ $\frac{2\sqrt{6}}{3}$　④ $\frac{\sqrt{6}}{3}$　⑤ $\frac{\sqrt{6}}{2}$

해설

$\overline{BC} = 2\sqrt{2}$

$\overline{AB} = \frac{\overline{BC}}{\tan 60°} = \frac{2\sqrt{2}}{\sqrt{3}} = \frac{2\sqrt{6}}{3}$

14. 다음 그림에서 원 O 는 $\triangle$ABC 의 내접원이고 점 D, E, F 는 접점이다. $\overline{\mathrm{AB}} = 6$, $\overline{\mathrm{BC}} = 7$, $\overline{\mathrm{AC}} = 4$ 이고 $\overline{\mathrm{DG}} : \overline{\mathrm{GB}} = 2 : 3$ 일 때, $\triangle$GBC 의 넓이는?



① $\dfrac{9\sqrt{255}}{40}$ ② $\dfrac{9\sqrt{255}}{80}$ ③ $\dfrac{27\sqrt{255}}{40}$
④ $\dfrac{27\sqrt{255}}{80}$ ⑤ $\dfrac{27\sqrt{5}}{8}$

해설

$\overline{\mathrm{AD}} = a$ 라 하면 $\overline{\mathrm{AD}} = \overline{\mathrm{AF}} = a$, $\overline{\mathrm{BD}} = \overline{\mathrm{BE}} = 6-a$, $\overline{\mathrm{CE}} = \overline{\mathrm{CF}} = 4-a$

$\overline{\mathrm{BC}} = (6-a) + (4-a) = 7$ 이므로

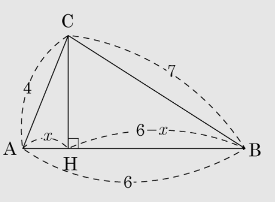
$a = \overline{\mathrm{AD}} = \frac{3}{2}$, $\overline{\mathrm{BD}} = 6 - \frac{3}{2} = \frac{9}{2}$

$\overline{\mathrm{AD}} : \overline{\mathrm{BD}} = \frac{3}{2} : \frac{9}{2} = 1 : 3$ 이므로 $\triangle\mathrm{DBC} = \frac{3}{4}\triangle\mathrm{ABC}$ 이고

$\overline{\mathrm{DG}} : \overline{\mathrm{GB}} = 2 : 3$ 이므로 $\triangle\mathrm{GBC} = \frac{3}{5}\triangle\mathrm{DBC}$

$\therefore \triangle\mathrm{GBC} = \frac{3}{5} \times \frac{3}{4} \times \triangle\mathrm{ABC} = \frac{9}{20}\triangle\mathrm{ABC}$

다음 그림에서 $\overline{\mathrm{AH}} = x$ 라 하면 $\overline{\mathrm{BH}} = 6 - x$



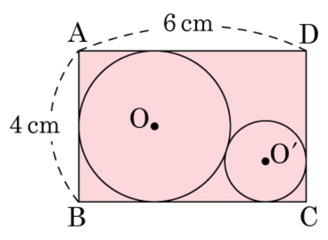
$\overline{\mathrm{CH}^2} = 4^2 - x^2 = 7^2 - (6-x)^2 \therefore\ x = \frac{1}{4}$

$\triangle$AHC 에서 $\overline{\mathrm{CH}} = \sqrt{4^2 - (\frac{1}{4})^2} = \sqrt{16 - \frac{1}{16}} = \sqrt{\frac{255}{16}} = \frac{\sqrt{255}}{4}$

$\therefore \triangle\mathrm{ABC} = \frac{1}{2} \times 6 \times \frac{\sqrt{255}}{4} = \frac{3}{4}\sqrt{255}$

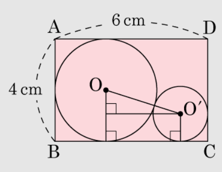
$\therefore \triangle\mathrm{GBC} = \frac{9}{20}\triangle\mathrm{ABC} = \frac{9}{20} \times \frac{3}{4}\sqrt{255} = \frac{27}{80}\sqrt{255}$

15. 가로 세로 길이가 6cm, 4cm 인 직사각형에서 가능한 한 큰 원을 오려내고, 남은 부분에서 또 가능한 한 큰 원을 오려낼 때 두 번째 원의 반지름의 길이는?

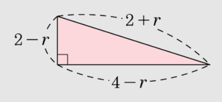


① $(6-4\sqrt{3})$cm　② $(4-4\sqrt{3})$cm　③ $(8-4\sqrt{3})$cm
④ $(6-\sqrt{3})$cm　⑤ $(8-\sqrt{3})$cm

해설



작은 원의 반지름을 r cm 라고 하면 큰 원의 반지름은 2cm 이므로



$(2-r)^2+(4-r)^2=(2+r)^2$
$\therefore r=8-4\sqrt{3}(\because 0<r<2)$