

1. 삼각형의 세 변의 길이 a, b, c 에 대하여 $(a+b-c)(a-b+c) = b(b+2c) + (c+a)(c-a)$ 가 성립할 때, 이 삼각형은 어떤 삼각형인가?

- ① 직각삼각형 ② 이등변삼각형 ③ 정삼각형
④ 예각삼각형 ⑤ 둔각삼각형

해설

$$(a+b-c)(a-b+c) = b(b+2c) + (c+a)(c-a) \text{에서}$$

$$\{a+(b-c)\} \{a-(b-c)\} = b^2 + 2bc + c^2 - a^2$$

$$a^2 - (b-c)^2 = -a^2 + b^2 + c^2 + 2bc$$

$$2a^2 = 2b^2 + 2c^2$$

$$\therefore a^2 = b^2 + c^2$$

따라서, 이 삼각형은 빗변의 길이가 a 인 직각삼각형이다.

2. $x^3 - x^2 + 2 = a(x-p)^3 + b(x-p)^2 + c(x-p)$ 가 x 에 대한 항등식이 되도록 실수 $a + b + c + p$ 의 값을 구하면?

① -1

② 1

③ -2

④ 2

⑤ 0

해설

양변에 $x = p$ 를 대입하면

$$p^3 - p^2 + 2 = 0$$

$$(p+1)(p^2 - 2p + 2) = 0 \therefore p = -1$$

따라서 주어진 식은

$$x^3 - x^2 + 2 = a(x+1)^3 + b(x+1)^2 + c(x+1)$$

양변에 $x = 0$ 을 대입하면 $2 = a + b + c$

$$\therefore a + b + c + p = 1$$

해설

$$a(x-p)^3 + b(x-p)^2 + c(x-p)$$

$$= (x-p) \{a(x-p)^2 + b(x-p) + c\}$$

$$\therefore (x+1)(x^2 - 2x + 2)$$

$$= (x-p) \{a(x-p)^2 + b(x-p) + c\}$$

양변을 비교하면, $x+1 = x-p$,

$$x^2 - 2x + 2 = a(x-p)^2 + b(x-p) + c$$

$$\therefore p = -1$$

$$\text{또 } x^2 - 2x + 2 = a(x+1)^2 + b(x+1) + c$$

$$= ax^2 + (2a+b)x + a+b+c$$

$$\therefore a = 1, 2a+b = -2, a+b+c = 2$$

$$\therefore b = -4, c = 5$$

따라서 $a = 1, b = -4, c = 5, p = -1$

$$\therefore a + b + c + p = 1$$

3. 두 다항식 $f(x), g(x)$ 에 대하여 $f(x) + g(x)$ 를 $x+1$ 로 나누면 나누어 떨어지고, $f(x) - g(x)$ 를 $x+1$ 로 나누면 나머지가 2이다. 다음 [보기] 의 다항식 중에서 $x+1$ 로 나누어 떨어지는 것을 모두 고르면?

㉠ $x + f(x)$

㉡ $x - g(x)$

㉢ $x + f(x)g(x)$

① ㉠

② ㉢

③ ㉠, ㉡

④ ㉠, ㉢

⑤ ㉠, ㉡, ㉢

해설

$$f(x) + g(x) = (x+1)Q(x)$$

$$f(x) - g(x) = (x+1)Q'(x) + 2$$

$x = -1$ 을 두 식에 각각 대입하면

$$f(-1) + g(-1) = 0 \cdots \textcircled{1}$$

$$f(-1) - g(-1) = 2 \cdots \textcircled{2}$$

①, ②을 연립하여 풀면 $f(-1) = 1, g(-1) = -1$

보기의 식 중에서 $x+1$ 로 나누어 떨어지는 것은 $x = -1$ 을 대입하면 식의 값이 0 이 된다.

$$\textcircled{1} \quad -1 + f(-1) = -1 + 1 = 0$$

$$\textcircled{2} \quad -1 - g(-1) = -1 + 1 = 0$$

$$\textcircled{3} \quad -1 + f(-1)g(-1) = -1 + 1 \times (-1) = -2$$

$$\therefore \textcircled{1}, \textcircled{2}$$

4. 복소수 $z = a + bi$ (단, a, b 는 실수, $i = \sqrt{-1}$ 를 좌표평면 위의 점 $P(a, b)$ 에 대응시킬 때, $(2 - 3i)z$ 가 실수가 되게 하는 점 P 가 그리는 도형은?

① 원

② 아래로 볼록한 포물선

③ 위로 볼록한 포물선

④ 기울기가 음인 직선

⑤ 기울기가 양인 직선

해설

$$\begin{aligned}(2 - 3i)z &= (2 - 3i)(a + bi) \\ &= (2a + 3b) + (2b - 3a)i\end{aligned}$$

$$\therefore 2b - 3a = 0 \quad \therefore b = \frac{3}{2}a \Rightarrow \text{기울기가 양인 직선}$$

5. $|x|(2+3i) + 2|y|(1-2i) = 6-5i$ 를 만족하는 실수 x, y 의 순서쌍 (x, y) 를 꼭짓점으로 하는 다각형의 넓이는?

① 5

② 6

③ 7

④ 8

⑤ 9

해설

$$(2|x| + 2|y|) + (3|x| - 4|y|)i = 6 - 5i$$

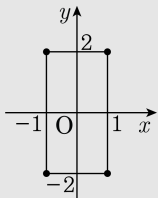
복소수의 상등에 의하여

$$|x| + |y| = 3, \quad 3|x| - 4|y| = -5$$

두 식을 연립하면

$$|x| = 1, \quad |y| = 2$$

$$(x, y) \rightarrow (1, 2), (1, -2), (-1, 2), (-1, -2)$$



$$\therefore \text{직사각형의 넓이} = 2 \times 4 = 8$$

6. x 에 관한 이차방정식 $a(1-i)x^2 + (3+2ai)x + (2a+3i) = 0$ 이 실근을 갖기 위한 실수 a 의 값을 구하면?

① 1

② -1

③ 2

④ -2

⑤ 3

해설

$a(1-i)x^2 + (3+2ai)x + (2a+3i) = 0$ 의 실근 조건은 복소수 계수 이차방정식이므로 판별식을 쓸 수 없다. 근이 실수라는 것은 x 가 실수임을 뜻하므로 복소수의 상등정리에서

$$(ax^2 + 3x + 2a) + (-ax^2 + 2ax + 3)i = 0 \text{ 이어야 하므로}$$

$$ax^2 + 3x + 2a = 0 \cdots \cdots \textcircled{㉠}$$

$$-ax^2 + 2ax + 3 = 0 \cdots \cdots \textcircled{㉡}$$

$\textcircled{㉠} + \textcircled{㉡}$ 하면

$$(2a+3)x + (2a+3) = 0, (2a+3)(x+1) = 0$$

$$2a+3 = 0 \text{ 또는 } x+1 = 0$$

$$\therefore a = -\frac{3}{2} \text{ 또는 } x = -1$$

i) $a = -\frac{3}{2}$ 일 때

$$\textcircled{㉠}\text{식에서 } -\frac{3}{2}x^2 + 3x - 3 = 0, x^2 - 2x + 2 = 0$$

이므로 허근을 가진다. $\therefore a \neq -\frac{3}{2}$

ii) $x = -1$ 일 때 $\textcircled{㉠}$ 에 대입하면,

$$a - 3 + 2a = 0, 3a = 3 \quad \therefore a = 1$$

7. n 이 짝수일 때, $\left(\frac{1+i}{\sqrt{2}}\right)^{4n+1} + \left(\frac{1-i}{\sqrt{2}}\right)^{4n+1}$ 의 값은?

① -2

② $-\sqrt{2}$

③ 0

④ 2

⑤ $\sqrt{2}$

해설

$$\begin{aligned} & \left(\frac{1+i}{\sqrt{2}}\right)^{4n+1} + \left(\frac{1-i}{\sqrt{2}}\right)^{4n+1} \\ &= \left\{ \left(\frac{1+i}{\sqrt{2}}\right)^2 \right\}^{2n} \cdot \frac{1+i}{\sqrt{2}} + \left\{ \left(\frac{1-i}{\sqrt{2}}\right)^2 \right\}^{2n} \cdot \left(\frac{1-i}{\sqrt{2}}\right) \\ &= (\pi^2)^{2n} \cdot \frac{1+i}{\sqrt{2}} + \{(-\pi)^2\}^{2n} - \left(\frac{1-i}{\sqrt{2}}\right) \\ &= \frac{1+i}{\sqrt{2}} + \frac{1-i}{\sqrt{2}} \\ &= \frac{2}{\sqrt{2}} = \sqrt{2} \end{aligned}$$

8. $\frac{10^{85}}{10^{15} + 10^5} = k \times 10^n$ (단, $0 < k < 10$, n 은 자연수)로 나타낼 때, n 의 값을 구하면?

① 72

② 71

③ 70

④ 69

⑤ 68

해설

$$\frac{10^{85}}{10^{15} + 10^5} = N \text{이라고 하면}$$

$$\frac{10^{85}}{10^{15} + 10^{15}} < N < \frac{10^{85}}{10^{15}}$$

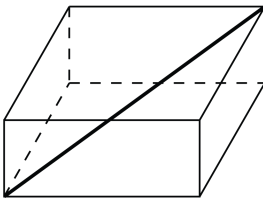
$$\frac{10 \times 10^{84}}{2 \times 10^{15}} < N < \frac{10 \times 10^{84}}{10^{15}}$$

$$5 \times 10^{69} < N < 10 \times 10^{69}$$

$$\text{따라서 } N = k \times 10^{69} (5 < k < 10)$$

$$\therefore n = 69$$

9. 다음 그림과 같이 대각선의 길이가 3이고 겉넓이가 16, 부피가 6인 직육면체가 있다. 이 직육면체의 가로, 세로, 높이를 각각 a , b , c 라 할 때, $a^3 + b^3 + c^3$ 의 값은?



① 12

② 18

③ 21

④ 23

⑤ 30

해설

$$\sqrt{a^2 + b^2 + c^2} = 3, \quad abc = 6, \quad 2(ab + bc + ca) = 16$$

$$(a + b + c)^2 = a^2 + b^2 + c^2 + 2(ab + bc + ca)$$

$$(a + b + c)^2 = 25, \quad a + b + c = 5 (\because a, b, c \text{는 양수})$$

$$a^3 + b^3 + c^3 - 3abc$$

$$= (a + b + c)(a^2 + b^2 + c^2 - ab - bc - ca) \cdots \textcircled{1}$$

①에 각각 대입하면

$$a^3 + b^3 + c^3 - 18 = 5 \times (9 - 8)$$

$$a^3 + b^3 + c^3 = 23$$

10. x 에 대한 다항식 $f(x)$ 를 $(x-1)^2$ 으로 나누면 나누어 떨어지고, $x+1$ 로 나누면 나머지가 4이다. 이 때, $f(x)$ 를 $(x+1)(x-1)^2$ 으로 나눌 때, 나머지를 $ax^2 + bx + c$ 라 하면 $a + b + c$ 의 값은?

① -2

② -1

③ 0

④ 1

⑤ 2

해설

$f(x)$ 를 $x+1$ 로 나눈 나머지가 4이므로

$$f(-1) = 4$$

$$f(x) = (x-1)^2 Q(x) \cdots \text{㉠}$$

$$\begin{aligned} f(x) &= (x+1)(x-1)^2 Q'(x) + ax^2 + bx + c \\ &= (x+1)(x-1)^2 Q'(x) + a(x-1)^2 \quad (\because \text{㉠}) \end{aligned}$$

양변에 $x = -1$ 를 대입하면

$$f(-1) = 4a = 4 \therefore a = 1$$

$$ax^2 + bx + c = a(x-1)^2 = x^2 - 2x + 1$$

$$\therefore b = -2, c = 1$$

$$\therefore a + b + c = 0$$

해설

$ax^2 + bx + c$ 를 구하는 것이 아니라 $a + b + c$ 를 통째로 구할 때는 다음과 같이 풀 수 있다.

$f(x)$ 를 $(x-1)^2$ 으로 나누어 떨어지므로 $f(1) = 0$

$$f(x) = (x+1)(x-1)^2 Q'(x) + ax^2 + bx + c$$

양변에 $x = 1$ 를 대입하면

$$f(1) = 0 + (a + b + c) = 0$$

$$\therefore a + b + c = 0$$

11. 다음 중 $\left(\frac{997}{1000}\right)^3 + \left(\frac{3}{1000}\right)^3 - 1$ 의 값과 같은 것은?

① $\frac{3^2 \times 997^3}{10}$

② $\frac{3^2 \times 997^6}{10}$

③ $-\frac{3^2 \times 997^3}{10}$

④ $-\frac{3^2 \times 997}{10^6}$

⑤ $-\frac{3^2 \times 997^9}{10}$

해설

주어진 식에서 $\frac{997}{1000}$ 과 $\frac{3}{1000}$ 을 더해보면 $\frac{997+3}{1000} = 1$ 이므로

$a = \frac{997}{1000}$, $b = \frac{3}{1000}$, $c = -1$ 이라 하면

$a + b + c = 0$ 이 된다.

따라서 $a + b + c = 0$ 이므로

$$a^3 + b^3 + c^3 - 3abc$$

$= (a+b+c)(a^2+b^2+c^2-ab-bc-ca)$ 에서 $a^3+b^3+c^3 = 3abc$ 임을 이용하면

$$a^3 + b^3 + c^3 = \left(\frac{997}{1000}\right)^3 + \left(\frac{3}{1000}\right)^3 + (-1)^3 \text{의 값은}$$

$$3abc = 3 \times \frac{997}{1000} \times \frac{3}{1000} \times (-1) \text{와 같으므로}$$

구하는 값은

$$3 \times \frac{997}{1000} \times \frac{3}{1000} \times (-1) = -\frac{3^2 \times 997}{10^6}$$

12. 삼각형의 세 변의 길이 a, b, c 에 대하여 $\frac{a-b+c}{a+b+c} = \frac{-a-b+c}{a-b-c}$ 일 때, 이 삼각형은 어떤 삼각형인가?

- ㉠ 빗변의 길이가 a 인 직각삼각형
 ㉡ 빗변의 길이가 b 인 직각삼각형
 ㉢ 빗변의 길이가 c 인 직각삼각형
 ㉣ $a = b$ 인 이등변삼각형
 ㉤ $b = c$ 인 이등변삼각형

- ① 빗변의 길이가 a 인 직각삼각형
 ② 빗변의 길이가 b 인 직각삼각형
 ③ 빗변의 길이가 c 인 직각삼각형
 ④ $a = b$ 인 이등변삼각형
 ⑤ $b = c$ 인 이등변삼각형

해설

$$\frac{a-b+c}{a+b+c} = \frac{-a-b+c}{a-b-c} \text{ 에서}$$

$$(a-b+c)(a-b-c) = (a+b+c)(-a-b+c)$$

$$(a-b+c)(a-b-c) + (a+b+c)(a+b-c) = 0$$

$$\{(a-b)+c\}\{(a-b)-c\} + \{(a+b)+c\}\{(a+b)-c\} = 0$$

$$(a-b)^2 - c^2 + (a+b)^2 - c^2 = 0$$

$$a^2 - 2ab + b^2 - c^2 + a^2 + 2ab + b^2 - c^2$$

$$= 2a^2 + 2b^2 - 2c^2$$

$$= 2(a^2 + b^2 - c^2) = 0$$

$$\therefore a^2 + b^2 - c^2 = 0$$

그러므로 이 삼각형은 빗변의 길이가 c 인 직각삼각형이다.

13. 다음 두 다항식 A, B 의 최대공약수가 이차식일 때, 상수 a, b 의 값의 곱 ab 를 구하면?

$$A = x^3 - ax - 2 \quad B = x^3 - 2x^2 + bx + 2$$

① -3

② -1

③ 0

④ 2

⑤ 4

해설

$$\begin{cases} A = x^3 - ax - 2 \\ B = x^3 - 2x^2 + bx + 2 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} A + B = x(2x^2 - 2x - a + b) \\ A - B = 2x^2 - (a + b)x - 4 \end{cases}$$

A, B 의 최대공약수는 $A + B, A - B$ 의 최대공약수와 일치하고 x 는 A, B 의 공약수가 아니다.

$$\therefore 2x^2 - 2x - a + b = 2x^2 - (a + b)x - 4$$

$$\therefore a + b = 2, \quad -a + b = -4$$

$$\therefore a = 3, \quad b = -1$$

따라서, $ab = -3$

14. 다항식 $f(x) = x^3 + 2x^2 + px + q$ 를 다항식 $g(x) = -x^3 + 2x + q$ 로 나누었을 때의 나머지를 $R(x)$ 라 하고, $g(x)$ 와 $R(x)$ 가 $x-1$ 만을 공통인수로 가질 때, $f(-1) + g(2)$ 의 값을 구하면?

① -5

② -4

③ -3

④ -2

⑤ -1

해설

$$f(x) = g(x)Q(x) + R(x) \text{에서}$$

$f(x)$ 와 $g(x)$ 의 최대공약수는 $g(x)$ 와 $R(x)$ 의 최대공약수

$g(x)$ 와 $R(x)$ 의 공통인수가 $x-1$ 이므로

$g(x)$ 와 $R(x)$ 의 최대공약수가 $x-1$

$\therefore f(x)$ 와 $g(x)$ 의 최대공약수가 $x-1$ 이다.

$$f(1) = 3 + p + q = 0 \quad \therefore p + q = -3$$

$$g(1) = 1 + q = 0 \quad \therefore q = -1 \quad \therefore p = -2$$

$$\therefore f(x) = x^3 + 2x^2 - 2x - 1, \quad g(x) = -x^3 + 2x - 1 \quad \therefore f(-1) + g(2) = 2 - 5 = -3$$

15. 자연수 n 에 대하여 $i(1+i)^n$ 이 양의 실수일 때, 다음 중 n 의 값이 될 수 있는 것은?

① 18

② 19

③ 20

④ 21

⑤ 22

해설

$$i(1+i)^n = p(p > 0), (1+i)^n = \frac{p}{i} = -pi$$

즉, $(1+i)^n = \text{음수} \times i$ 이어야 한다.

이 때, n 이 홀수이면 $(1+i)^n$ 은 순허수꼴이 될 수 없다.

$$n = 2k \text{ 일 때, } (1+i)^{2k} = (2i)^k$$

$k = 4m$ 이면 $(2i)^{4m}$ 이 양의 정수이므로

$$k = 4m + 1 \Rightarrow (1+i)^{2k} = (2i)^k = (2i)^{4m+1} \Rightarrow \text{양수} \times 2i$$

$$k = 4m + 2 \Rightarrow (1+i)^{2k} = (2i)^k = (2i)^{4m+2} \Rightarrow \text{양수} \times (-4)$$

$$k = 4m + 3 \Rightarrow (1+i)^{2k} = (2i)^k = (2i)^{4m+3} \Rightarrow \text{양수} \times (-8i)$$

따라서 $k = 4m + 3$, 즉 $n = 2k = 8m + 6$ 일 때 조건을 만족한다.

주어진 수 중에서 알맞은 것은 22 이다.