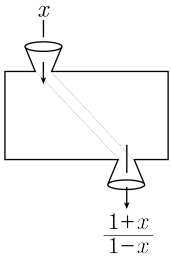


1. 다음 그림과 같이 x 를 넣으면 $\frac{1+x}{1-x}$ 가 나오는 상자
가 있다. 이 상자에 x_1 을 넣었을 때, 나오는 것을 x_2 ,
 x_2 를 다시 넣었을 때 나오는 것을 x_3 라 한다. 이와
같이 계속하여 x_n 을 넣었을 때 나오는 것을 x_{n+1}
이라 한다. $x_1 = -\frac{1}{2}$ 일 때, x_{2000} 을 구하여라.



▶ 답 :

▷ 정답 : -3

해설

$$x_1 = -\frac{1}{2} \text{ 이면}$$

$$x_2 = \frac{1 + \left(-\frac{1}{2}\right)}{1 - \left(-\frac{1}{2}\right)} = \frac{1}{3}$$

$$x_3 = \frac{1 + \frac{1}{3}}{1 - \frac{1}{3}} = 2,$$

$$x_4 = \frac{1 + 2}{1 - 2} = -3,$$

$$x_5 = \frac{1 + (-3)}{1 - (-3)} = -\frac{1}{2}, x_6 = \frac{1}{3}, \dots$$

그러므로 $k = 0, 1, 2, 3, \dots$ 일 때

$$x_{4k+1} = -\frac{1}{2}, x_{4k+2} = \frac{1}{3}, x_{4k+3} = 2, x_{4k+4} = -3$$

따라서, $2000 = 4 \times 499 + 4$ 이므로

$$x_{2000} = x_4 = -3$$

2. $\left(\frac{1}{x}\right)^2 = 7 + 2\sqrt{12}$, $\left(\frac{1}{y}\right)^2 = 7 - 2\sqrt{12}$ 을 만족하는 두 양수 x, y 에 대하여, $x^3 + y^3$ 의 값을 구하시오.

▶ 답 :

▶ 정답 : 52

해설

$$\left(\frac{1}{x}\right)^2 = 7 + 2\sqrt{12}, \frac{1}{x} = \sqrt{3} + 2, x = 2 - \sqrt{3}$$

$$\left(\frac{1}{y}\right)^2 = 7 - 2\sqrt{12}, \frac{1}{y} = 2 - \sqrt{3}, y = 2 + \sqrt{3}$$

$$x + y = 4, xy = 1$$

$$x^3 + y^3 = (x + y)^3 - 3xy(x + y) = 64 - 12 = 52$$

3. 함수 $y = \frac{ax+8}{x+b}$ 의 그래프의 점근선의 방정식이 $x = 6, y = -1$ 일 때, 함수 $y = \sqrt{bx-a}$ 의 정의역에 속하는 정수의 최댓값은? (단, a, b 는 상수이다.)

① -2 ② -1 ③ 0 ④ 1 ⑤ 2

해설

$$y = \frac{ax+8}{x+b} = \frac{8-ab}{x+b} + a \text{ 이고}$$

점근선의 방정식이 $x = -b = 6, y = a = -1$ 이므로 $a = -1, b = -6$

함수 $y = \sqrt{-6x+1}$ 의 정의역은 $\left\{x \mid x \leq \frac{1}{6}\right\}$ 이므로 구하는 정수의 최댓값은 0 이다.

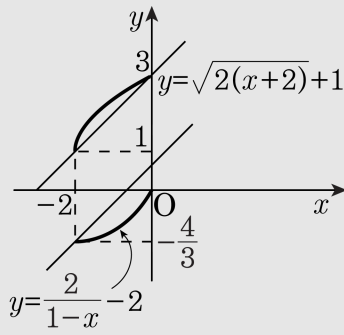
4. 정의역이 $\{x | -2 \leq x \leq 0\}$ 인 두 함수 $y = \sqrt{2(x+2)} + 1$, $y = \frac{2}{1-x} - 2$ 에 대하여 $y = x + r$ 의 그래프가 $y = \sqrt{2(x+2)} + 1$ 의 그래프보다는 아래에 있고 $y = \frac{2}{1-x} - 2$ 의 그래프 보다는 위에 있을 때, r 은 범위가 $r_1 < r < r_2$ 라고 한다. $3r_1 - r_2$ 의 값을 구하면?

① -1 ② 1 ③ 2 ④ 3 ⑤ 4

해설

$-2 \leq x \leq 0$ 에서

$y = \sqrt{2(x+2)} + 1$ 과 $y = \frac{2}{1-x} - 2$ 의 그래프를 나타내면 다음 그림과 같다.



이 때, $y = x + r$ 의 그래프가

$y = \sqrt{2(x+2)} + 1$ 의 그래프보다

아래에 있으므로 $r < 3$

또한, $y = x + r$ 의 그래프가

$y = \frac{2}{1-x} - 2$ 의 그래프보다

위에 있으므로 $r > \frac{2}{3}$

$\therefore \frac{2}{3} < r < 3$

따라서 $r_1 = \frac{2}{3}$, $r_2 = 3$ 이므로

$\therefore 3r_1 - r_2 = 3 \cdot \frac{2}{3} - 3 = -1$

5. 한 개의 주사위를 두 번 던져서 첫 번째 나온 눈의 수를 a , 두 번째 나온 눈의 수를 b 라 하자. $f(x) = (a-4)x+6$, $g(x) = (3-b)x+2$ 라 할 때 합성함수 $y = (f \circ g)(x)$ 의 그래프가 x 축과 만나지 않는 경우의 수는?

① 4 ② 6 ③ 8 ④ 10 ⑤ 12

해설

$y = f(g(x)) = (a-4)\{(3-b)x+2\}+6$
 $= (a-4)(3-b)x + (2a-2)$
함수의 그래프가 x 축과 만나지 않기 위해서는 $2a-2 \neq 0$ 이고 $(a-4)(3-b) = 0$ 이다.
 $\therefore (a,b)$ 는 $(4,1), (4,2), (4,3), (4,4), (4,5), (4,6), (2,3), (3,3), (5,3), (6,3)$ 의 10 가지

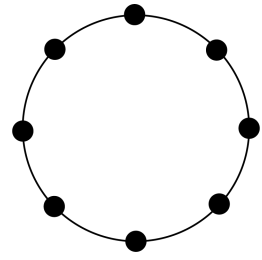
7. 여섯 개의 수 0, 1, 2, 3, 4, 5 가 있다. 이 중에서 서로 다른 네 개의 수를 뽑아서 네 자리 정수를 만들려고 한다. 이때, 십의 자리의 수가 일의 자리의 수보다 작게 되는 네 자리의 정수는 모두 몇 개인가?

- ① 90개 ② 108개 ③ 120개 ④ 145개 ⑤ 150개

해설

네 자리수를 $A B C D$ 라 하면
 A 자리에 올수 있는 수는 0 을 제외한 수이므로 5 개,
 C 자리에 올 수 있는수는 A 에서 사용한 수를 제외하고
0 을 포함한 수이므로 5 개,
 B 와 D 는 남아있는 4 개의 수중 큰 수와 작은 수를 구분해야
하므로 ${}_4C_2$,
따라서 구하는 개수는 $5 \times 5 \times {}_4C_2 = 150$ (개)

8. 그림과 같이 원 위에 8개의 점이 같은 간격으로 놓여 있을 때, 이 중에서 네 점을 꼭짓점으로 하는 사각형의 개수는?



- ① 64 ② 70 ③ 72 ④ 80 ⑤ 96

해설

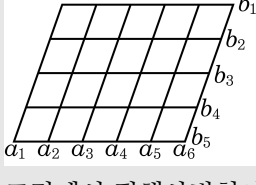
8개의 점 중 4 개를 선택하는 방법과 같다.
 ${}_8C_4 = 70$

9. 다음 그림과 같이 5 개의 평행선과 6 개의 평행선이 서로 만나고 있다. 이들 평행선으로 이루어진 평행사변형의 개수를 구하면?



- ① 150개 ② 120개 ③ 90개 ④ 60개 ⑤ 30개

해설



그림에서 평행사변형이 형성되려면
가 로 축 $(a_1, a_2, a_3, a_4, a_5, a_6)$ 중 에서 2 개 와 세 로 축 $(b_1, b_2, b_3, b_4, b_5)$ 중 에서 2 개 를 연결하면 생기게 되므로
구하는 평행사변형의 개수는

$${}_6C_2 \times {}_5C_2 = \frac{6!}{2!4!} \times \frac{5!}{2!3!} = 15 \times 10 = 150$$

10. 서로 다른 여섯 권의 책을 세 사람에게 선물로 주려고 한다. 세 사람에게 적어도 한 권 이상씩 주려고 할 때, 선물을 주는 방법의 수는?
- ① 500 가지 ② 540 가지 ③ 580 가지
④ 620 가지 ⑤ 660 가지

해설

서로 다른 여섯 권의 책을 세 사람에게 적어도 한 권 이상씩 주는 방법은 (4, 1, 1), (3, 2, 1), (2, 2, 2) 의 세 가지 경우가 있다.

(4, 1, 1) : ${}_6C_4 \times {}_2C_1 \times {}_1C_1 \times \frac{1}{2!} \times 3! = 90$ (가지)

(3, 2, 1) : ${}_6C_3 \times {}_3C_2 \times {}_1C_1 \times 3! = 360$ (가지)

(2, 2, 2) : ${}_6C_2 \times {}_4C_2 \times {}_2C_2 \times \frac{1}{3!} \times 3 = 90$ (가지)

따라서, 구하는 방법의 수는 $90 + 360 + 90 = 540$ (가지)

11. $\frac{x-3}{x-2} - \frac{x-2}{x-1} - \frac{x-1}{x} + \frac{x}{x+1}$ 를 간단히 하면?

① $\frac{2}{x(x-1)(x+1)(x+2)}$

② $\frac{-2x}{x(x-1)(x+1)(x+2)}$

③ $\frac{-2x+1}{x(x-1)(x+1)(x+2)}$

④ $\frac{-4x}{x(x-1)(x+1)(x+2)}$

⑤ $\frac{-4x+2}{x(x-1)(x+1)(x+2)}$

해설

$$\begin{aligned}
 (\text{준 식}) &= \left(1 + \frac{-1}{x-2}\right) - \left(1 + \frac{-1}{x-1}\right) \\
 &\quad - \left(1 + \frac{-1}{x}\right) + \left(1 + \frac{-1}{x+1}\right) \\
 &= \frac{-1}{x-2} + \frac{1}{x-1} + \frac{1}{x} + \frac{-1}{x+1} \\
 &= \frac{-x+1+x-2}{(x-2)(x-1)} + \frac{x+1-x}{x(x+1)} \\
 &= \frac{-x^2-x+x^2-3x+2}{x(x-1)(x+1)(x-2)} \\
 &= \frac{-4x+2}{x(x-1)(x+1)(x+2)}
 \end{aligned}$$

12. 0이 아닌 서로 다른 세 실수 x, y, z 가 $x + \frac{2}{y} = y + \frac{2}{z} = z + \frac{2}{x}$ 를 만족할 때, xyz 의 값을 구하면?

- ① $\pm \sqrt{2}$
- ② ± 3
- ③ $\pm 3\sqrt{2}$
- ④ $\pm 2\sqrt{2}$
- ⑤ $\pm 4\sqrt{2}$

해설

$$x + \frac{2}{y} = y + \frac{2}{z} \text{ 에서 } x - y = \frac{2(y - z)}{yz}$$
$$y + \frac{2}{z} = z + \frac{2}{x} \text{ 에서 } y - z = \frac{2(z - x)}{zx}$$
$$z + \frac{2}{x} = x + \frac{2}{y} \text{ 에서 } z - x = \frac{2(x - y)}{xy}$$
$$\therefore (x - y)(y - z)(z - x) = \frac{8(x - y)(y - z)(z - x)}{(xyz)^2}$$
$$x, y, z \text{가 서로 다른 실수이므로 } (xyz)^2 = 8$$
$$\therefore xyz = \pm 2\sqrt{2}$$

13. 세 상자 P, Q, R에 들어 있는 구슬의 개수의 비가 처음에는 2 : 3 : 4였다. 전체 구슬의 개수는 변함없이 각 상자에서 구슬을 꺼내 다른 상자에 넣는 시행을 반복한 후, P, Q, R에 들어 있는 구슬의 개수의 비를 구했더니 3 : 2 : 5가 되었다. P상자에 들어 있는 구슬의 개수가 처음보다 7개가 늘었다면 R상자에 들어있는 구슬의 개수의 변화는?
- ① 처음보다 7개 줄었다. ② 처음보다 6개 줄었다.
③ 개수의 변화가 없다. ④ 처음보다 5개 늘었다.
⑤ 처음보다 8개 늘었다.

해설

전체 구슬의 개수를 x 라 하면 조건에서
P상자의 구슬이 7개 늘었으므로

$$\frac{3x}{10} - \frac{2x}{9} = 7$$

$$\therefore x = 90 \text{ (개)}$$

따라서 R 상자의 구슬의 개수는 시행 전

$$: 4 \times \frac{90}{9} = 40 \text{ (개)}$$

$$\text{시행 후} : 5 \times \frac{90}{10} = 45 \text{ (개)} \text{ 이므로}$$

시행 후에 처음보다 5개가 늘었다.

14. 점근선이 $x = 4$, $y = -1$ 이고, 점 $(6, 0)$ 을 지나는 유리함수 $f(x)$ 의 $-2 \leq x \leq 2$ 에서의 최댓값을 M , 최솟값을 m 이라 할 때, Mm 의 값은?

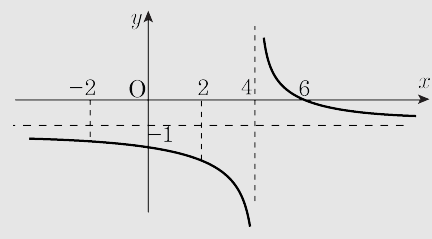
- ① $\frac{2}{3}$ ② $\frac{4}{3}$ ③ $-\frac{2}{3}$ ④ $-\frac{4}{3}$ ⑤ $\frac{8}{3}$

해설

$$y = \frac{k}{x-4} - 1, (k \neq 0)$$

$$0 = \frac{k}{6-4} - 1 \therefore k = 2$$

$$f(x) = \frac{2}{x-4} - 1$$



$$x = -2 \text{ 일 때, } M = \frac{2}{-2-4} - 1 = -\frac{4}{3}$$

$$x = 2 \text{ 일 때, } m = \frac{2}{2-4} - 1 = -2$$

$$\therefore Mm = -\frac{4}{3} \times (-2) = \frac{8}{3}$$

15. $x^2 + 6x + 4 = 0$ 의 두 근이 a, b 일 때, $\frac{\sqrt{b}}{\sqrt{a}} + \frac{\sqrt{a}}{\sqrt{b}}$ 의 값은?

- ① -3 ② $-\frac{3}{2}$ ③ -1 ④ $\frac{3}{2}$ ⑤ 3

해설

$$x^2 + 6x + 4 = 0$$

$$a + b = -6, ab = 4 \Rightarrow a < 0, b < 0$$

$$\frac{\sqrt{b}}{\sqrt{a}} + \frac{\sqrt{a}}{\sqrt{b}} = \frac{(\sqrt{b})^2 + (\sqrt{a})^2}{\sqrt{a}\sqrt{b}} = \frac{b+a}{-\sqrt{ab}}$$

$$\therefore \frac{-6}{-2} = 3$$

16. $x = \sqrt[3]{\sqrt{3}+2} - \sqrt[3]{\sqrt{3}-2}$ 일 때, $x^4 + 2x^3 - 3x^2 - 10x - 4$ 의 값을 구하면?

- ① 4 ② 3 ③ 2 ④ 1 ⑤ 0

해설

$$\begin{aligned} x &= \sqrt[3]{\sqrt{3}+2} - \sqrt[3]{\sqrt{3}-2} \text{에서} \\ \sqrt[3]{\sqrt{3}+2} &= a, \sqrt[3]{\sqrt{3}-2} = b \text{라 하면} \\ x &= a - b, ab = -1 \\ x^3 &= (a - b)^3 \\ &= a^3 - b^3 - 3ab(a - b) \\ &= \sqrt{3} + 2 - (\sqrt{3} - 2) + 3x = 4 + 3x \\ \therefore x^3 - 3x - 4 &= 0 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \therefore x^4 + 2x^3 - 3x^2 - 10x - 4 & \\ &= (x^3 - 3x - 4)(x + 2) + 4 \\ &= 0 + 4 = 4 \end{aligned}$$

17. $\sqrt{x+2} = x+k$ 가 서로 다른 두 개의 근을 가질 때 실수 k 의 값의 범위는? (단, k 는 상수)

① $2 < k < \frac{9}{4}$

② $2 \leq k < \frac{9}{4}$

③ $k > \frac{9}{4}$

④ $k < 2$

⑤ $2 < k \leq \frac{9}{4}$

해설

$y = \sqrt{x+2} \dots\dots\dots ①$

$y = x+k \dots\dots\dots ②$ 라 하면

그림에서 ②의 그래프는 기울기가 1이고 k 값의 변화에 따라 달라진다.

그런데 곡선 ①과 직선 ②가 서로 접하는 경우는

$\sqrt{x+2} = x+k \rightarrow x+2 = (x+k)^2 \rightarrow x^2 + 2kx + k^2 - x - 2 = 0$

$\rightarrow x^2 + (2k-1)x + k^2 - 2 = 0 \dots\dots\dots ③$

①, ②가 서로 접하려면 ③의 $D = 0$ 이어야 한다.

$\therefore (2k-1)^2 - 4(k^2-2) = 0, 4k^2 - 4k + 1 - 4k^2 + 8 = 0$

$-4k + 9 = 0, 4k = 9$

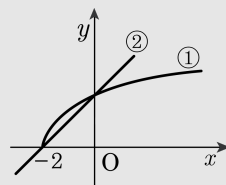
$\therefore k = \frac{9}{4}$

또 직선 ②가 $(-2, 0)$ 을 지날 경우

$0 = -2 + k$

$\therefore k = 2$

따라서 구하는 k 의 범위는 $2 \leq k < \frac{9}{4}$



18. $f(x) = \sqrt{x-1} + 1$ 과 그 역함수를 $g(x)$ 라 할 때 $g(x)$ 와 $f(x), g(x)$ 의 교점 사이의 거리를 각각 옳게 구한 것은?
- ① $g(x) = x^2 - 2x + 2, \sqrt{3}$ ② $g(x) = x^2 - 2x + 2, \sqrt{2}$
 ③ $g(x) = x^2 - 2x + 1, \sqrt{2}$ ④ $g(x) = x^2 - 2x + 1, \sqrt{3}$
 ⑤ $g(x) = x^2 - 2x + 1, \sqrt{5}$

해설

$f(x) = \sqrt{x-1} + 1$ 에 대하여
 i) $y = \sqrt{x-1} + 1$ 로 놓고 역함수를 구하면
 $y - 1 = \sqrt{x-1} \dots\dots \textcircled{1}$
 $\textcircled{1}$ 을 제곱하면
 $(y - 1)^2 = x - 1, y^2 - 2y + 1 = x - 1, x = y^2 - 2y + 2$
 $\therefore g(x) = x^2 - 2x + 2$
 ii) $f(x)$ 와 역함수 $g(x)$ 의 교점은
 $f(x)$ 와 $y = x$ 또는 $g(x)$ 와 $y = x$ 의 교점을
 구하면 된다.
 $g(x) = x$ 에서 $x^2 - 2x + 2 = x$
 $x^2 - 3x + 2 = 0, (x - 2)(x - 1) = 0$
 그러므로 $x = 2$ or $x = 1$ 에서 $y = 2$ or $y = 1$
 따라서 두 점 $(1, 1), (2, 2)$ 사이의 거리는
 $\sqrt{(2-1)^2 + (2-1)^2} = \sqrt{2}$

19. 토정비결에서는 다음 조건에 맞는 3개의 수 A, B, C로 각 사람의 그 해의 운세

A	B	C
---	---	---

를 결정한다.

- (1) A는 태어난 해에 해당하는 수를 3으로 나눈 나머지
(2) B는 태어난 달에 해당하는 수를 6으로 나눈 나머지
(3) C는 태어난 날에 해당하는 수를 8로 나눈 나머지

토정비결에 있는 서로 다른 운세

A	B	C
---	---	---

는 모두 몇 가지인가?
(단, 나머지가 0인 경우에는 나누는 수를 나머지로 한다)

- ① 64가지

② 144가지

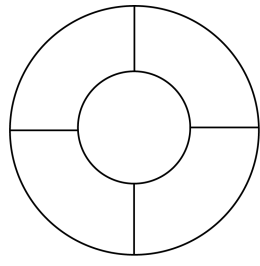
③ 127가지
- ④ 216가지

⑤ 254가지

해설

A는 1, 2, 3 총 3가지, B는 1부터 6까지 총 6가지, C는 1부터 8까지 총 8가지
따라서 총 가지 수는 $3 \times 6 \times 8 = 144$ 가지

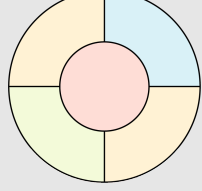
20. 다음의 원형 판에 서로 다른 4 가지의 색을 칠하려고 한다. 접한 부분은 서로 다른 색을 칠하고, 4 가지 색을 모두 사용한다고 할 때, 칠하는 방법의 수는? (단 회전해서 같은 모양이 나오면 같다고 생각한다.)



- ① 12 ② 16 ③ 20 ④ 23 ⑤ 24

해설

접한 곳은 다른 색을 칠하고 4 가지 색을 모두 사용하기 위해서는 서로 마주 보는 부분 1 쌍은 항상 같은 색이어야 한다.



또한 서로 다른 색인 마주보는 1 쌍은 서로 자리를 바꾸어도 같은 경우가 되므로, 가운데 부분부터 선택할 수 있는 각 색의 수는

$$\frac{4 \times 3 \times 2 \times 1}{2} = 12$$

∴ 12 가지