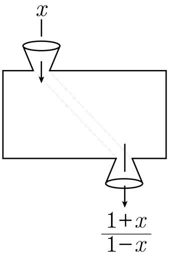
1. 다음 그림과 같이 x를 넣으면 $\dfrac{1+x}{1-x}$가 나오는 상자가 있다. 이 상자에 x_1을 넣었을 때, 나오는 것을 x_2, x_2를 다시 넣었을 때 나오는 것을 x_3라 한다. 이와 같이 계속하여 x_n을 넣었을 때 나오는 것을 x_{n+1}이라 한다. $x_1=-\dfrac{1}{2}$일 때, x_{2000}을 구하여라.



▶ 답 :

▷ 정답 : -3

해설

$x_1=-\dfrac{1}{2}$이면

$$x_2=\frac{1+\left(-\frac{1}{2}\right)}{1-\left(-\frac{1}{2}\right)}=\frac{1}{3}$$

$$x_3=\frac{1+\frac{1}{3}}{1-\frac{1}{3}}=2,$$

$$x_4=\frac{1+2}{1-2}=-3,$$

$$x_5=\frac{1+(-3)}{1-(-3)}=-\frac{1}{2},\ x_6=\frac{1}{3},\cdots$$

그러므로 $k=0,\ 1,\ 2,\ 3,\ \cdots$일 때

$$x_{4k+1}=-\frac{1}{2},\ x_{4k+2}=\frac{1}{3},\ \ x_{4k+3}=2,\ x_{4k+4}=-3$$

따라서, $2000=4\times 499+4$이므로

$$x_{2000}=x_4=-3$$

2. $\left(\frac{1}{x}\right)^2 = 7+2\sqrt{12}$, $\left(\frac{1}{y}\right)^2 = 7-2\sqrt{12}$을 만족하는 두 양수 x, y에 대하여, x^3+y^3의 값을 구하시오.

▶ 답 :

▷ 정답 : 52

해설

$$\left(\frac{1}{x}\right)^2 = 7+2\sqrt{12},\ \frac{1}{x} = \sqrt{3}+2,\ x = 2-\sqrt{3}$$

$$\left(\frac{1}{y}\right)^2 = 7-2\sqrt{12},\ \frac{1}{y} = 2-\sqrt{3},\ y = 2+\sqrt{3}$$

$x+y=4,\ \ xy=1$

$x^3+y^3 = (x+y)^3-3xy(x+y) = 64-12 = 52$

3. 함수 $y = \dfrac{ax+8}{x+b}$ 의 그래프의 점근선의 방정식이 $x=6$, $y=-1$ 일 때, 함수 $y=\sqrt{bx-a}$ 의 정의역에 속하는 정수의 최댓값은? (단, a, b 는 상수이다.)

① -2 ② -1 ③ 0 ④ 1 ⑤ 2

해설

$y = \dfrac{ax+8}{x+b} = \dfrac{8-ab}{x+b} + a$ 이고

점근선의 방정식이 $x=-b=6$, $y=a=-1$ 이므로 $a=-1$, $b=-6$

함수 $y=\sqrt{-6x+1}$ 의 정의역은 $\left\{x \mid x \le \dfrac{1}{6}\right\}$ 이므로 구하는 정수의 최댓값은 0 이다.

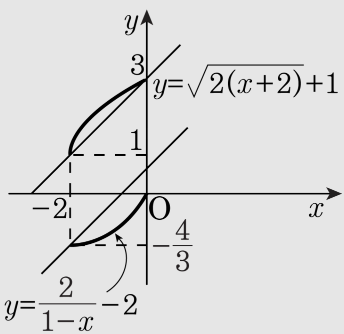
4. 정의역이 $\{x|-2 \le x \le 0\}$ 인 두 함수 $y = \sqrt{2(x+2)}+1$, $y = \dfrac{2}{1-x}-2$ 에 대하여 $y = x+r$ 의 그래프가 $y = \sqrt{2(x+2)}+1$ 의 그래프보다는 아래에 있고 $y = \dfrac{2}{1-x}-2$ 의 그래프 보다는 위에 있을 때, r 은 범위가 $r_1 < r < r_2$ 라고 한다. $3r_1 - r_2$ 의 값을 구하면?

① -1 ② 1 ③ 2 ④ 3 ⑤ 4

해설

$-2 \le x \le 0$ 에서

$y = \sqrt{2(x+2)}+1$과 $y = \dfrac{2}{1-x}-2$의 그래프를 나타내면 다음 그림과 같다.



이 때, $y = x+r$ 의 그래프가
$y = \sqrt{2(x+2)}+1$ 의 그래프보다
아래에 있으므로 $r < 3$
또한, $y = x+r$ 의 그래프가
$y = \dfrac{2}{1-x}-2$ 의 그래프보다
위에 있으므로 $r > \dfrac{2}{3}$

$\therefore \dfrac{2}{3} < r < 3$

따라서 $r_1 = \dfrac{2}{3}$, $r_2 = 3$ 이므로

$\therefore 3r_1 - r_2 = 3 \cdot \dfrac{2}{3} - 3 = -1$

5. 한 개의 주사위를 두 번 던져서 첫 번째 나온 눈의 수를 a, 두 번째 나온 눈의 수를 b 라 하자. $f(x)=(a-4)x+6,\quad g(x)=(3-b)x+2$ 라 할 때 합성함수 $y=(f\circ g)(x)$ 의 그래프가 x 축과 만나지 않는 경우의 수는?

① 4 ② 6 ③ 8 ④ 10 ⑤ 12

해설

$$y=f(g(x))=(a-4)\left\{(3-b)x+2\right\}+6$$
$$=(a-4)(3-b)x+(2a-2)$$

함수의 그래프가 x 축과 만나지 않기 위해서는 $2a-2\neq 0$ 이고 $(a-4)(3-b)=0$ 이다.

$\therefore$ (a,b) 는 $(4,1)$, $(4,2)$, $(4,3)$, $(4,4)$, $(4,5)$, $(4,6)$, $(2,3)$, $(3,3)$, $(5,3)$, $(6,3)$ 의 10 가지

6. p, o, w, e, r 의 5 개 문자를 일렬로 배열할 때, p, o, w 중 적어도 2 개가 이웃하는 경우의 수를 구하여라.

▶ 답 : 가지

▷ 정답 : 108 가지

해설

5 개의 문자를 일렬로 배열하는 경우의 수는 $5! = 120$

p, o, w 중 어느 것도 이웃하지 않는 경우의 수는

p, o, w 를 일렬로 배열하고 그 사이사이에 e, r 이 오도록 배열하는 경우의 수와 같으므로

$3! \times 2 = 6 \times 2 = 12$

따라서 구하는 경우의 수는 $120 - 12 = 108$

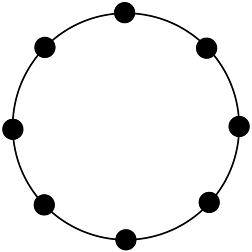
7. 여섯 개의 수 0, 1, 2, 3, 4, 5 가 있다. 이 중에서 서로 다른 네 개의 수를 뽑아서 네 자리 정수를 만들려고 한다. 이때, 십의 자리의 수가 일의 자리의 수보다 작게 되는 네 자리의 정수는 모두 몇 개인가?

① 90개 ② 108개 ③ 120개 ④ 145개 ⑤ 150개

해설

네 자리수를 $A\ B\ C\ D$라 하면
A 자리에 올수 있는 수는 0 을 제외한 수이므로 5 개,
C 자리에 올 수 있는수는 A 에서 사용한 수를 제외하고
0 을 포함한 수이므로 5 개,
B 와 D 는 남아있는 4 개의 수중 큰 수와 작은 수를 구분해야 하므로 ${}_4C_2$,
따라서 구하는 개수는 $5 \times 5 \times {}_4C_2 = 150$ (개)

8. 그림과 같이 원 위에 8개의 점이 같은 간격으로 놓여 있을 때, 이 중에서 네 점을 꼭짓점으로 하는 사각형의 개수는?



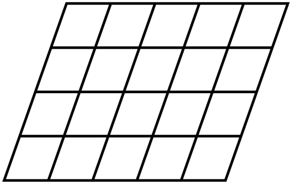
① 64 ② 70 ③ 72 ④ 80 ⑤ 96

해설

8개의 점 중 4 개를 선택하는 방법과 같다.

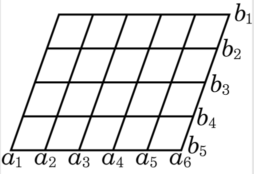
${}_8C_4 = 70$

9. 다음 그림과 같이 5 개의 평행선과 6 개의 평행선이 서로 만나고 있다. 이들 평행선으로 이루어진 평행사변형의 개수를 구하면?



① 150개 ② 120개 ③ 90개 ④ 60개 ⑤ 30개

해설



그림에서 평행사변형이 형성되려면 가로축 $(a_1, a_2, a_3, a_4, a_5, a_6)$ 중에서 2 개와 세로축 $(b_1, b_2, b_3, b_4, b_5)$ 중에서 2 개를 연결하면 생기게 되므로 구하는 평행사변형의 개수는

$${}_6\mathrm{C}_2 \times {}_5\mathrm{C}_2 = \frac{6!}{2!4!} \times \frac{5!}{2!3!} = 15 \times 10 = 150$$

10. 서로 다른 여섯 권의 책을 세 사람에게 선물로 주려고 한다. 세 사람에게 적어도 한 권 이상씩 주려고 할 때, 선물을 주는 방법의 수는?

① 500 가지 ② 540 가지 ③ 580 가지

④ 620 가지 ⑤ 660 가지

해설

서로 다른 여섯 권의 책을 세 사람에게 적어도 한 권 이상씩 주는 방법은 (4, 1, 1), (3, 2, 1), (2, 2, 2) 의 세 가지 경우가 있다.

$$(4,1,1):\ {}_6C_4 \times {}_2C_1 \times {}_1C_1 \times \frac{1}{2!} \times 3! = 90\ (\text{가지})$$

$$(3,2,1):\ {}_6C_3 \times {}_3C_2 \times {}_1C_1 \times 3! = 360\ (\text{가지})$$

$$(2,2,2):\ {}_6C_2 \times {}_4C_2 \times {}_2C_2 \times \frac{1}{3!} \times 3 = 90\ (\text{가지})$$

따라서, 구하는 방법의 수는 $90 + 360 + 90 = 540$ (가지)

11. $\dfrac{x-3}{x-2}-\dfrac{x-2}{x-1}-\dfrac{x-1}{x}+\dfrac{x}{x+1}$ 를 간단히 하면?

① $\dfrac{2}{x(x-1)(x+1)(x+2)}$ ② $\dfrac{-2x}{x(x-1)(x+1)(x+2)}$

③ $\dfrac{-2x+1}{x(x-1)(x+1)(x+2)}$ ④ $\dfrac{-4x}{x(x-1)(x+1)(x+2)}$

⑤ $\dfrac{-4x+2}{x(x-1)(x+1)(x+2)}$

해설

$$
\begin{aligned}
(\text{준 식}) &= \left(1+\frac{-1}{x-2}\right)-\left(1+\frac{-1}{x-1}\right) \\
&\quad -\left(1+\frac{-1}{x}\right)+\left(1+\frac{-1}{x+1}\right) \\
&= \frac{-1}{x-2}+\frac{1}{x-1}+\frac{1}{x}+\frac{-1}{x+1} \\
&= \frac{-x+1+x-2}{(x-2)(x-1)}+\frac{x+1-x}{x(x+1)} \\
&= \frac{-x^2-x+x^2-3x+2}{x(x-1)(x+1)(x-2)} \\
&= \frac{-4x+2}{x(x-1)(x+1)(x+2)}
\end{aligned}
$$

12. 0이 아닌 서로 다른 세 실수 x, y, z가 $x+\frac{2}{y}=y+\frac{2}{z}=z+\frac{2}{x}$를 만족할 때, xyz의 값을 구하면?

① $\pm\sqrt{2}$ ② ± 3 ③ $\pm 3\sqrt{2}$

④ $\pm 2\sqrt{2}$ ⑤ $\pm 4\sqrt{2}$

해설

$x+\frac{2}{y}=y+\frac{2}{z}$에서 $x-y=\frac{2(y-z)}{yz}$

$y+\frac{2}{z}=z+\frac{2}{x}$에서 $y-z=\frac{2(z-x)}{zx}$

$z+\frac{2}{x}=x+\frac{2}{y}$에서 $z-x=\frac{2(x-y)}{xy}$

$\therefore\ (x-y)(y-z)(z-x)=\frac{8(x-y)(y-z)(z-x)}{(xyz)^2}$

$x,\ y,\ z$가 서로 다른 실수이므로 $(xyz)^2=8$

$\therefore\ xyz=\pm 2\sqrt{2}$

13. 세 상자 P, Q, R에 들어 있는 구슬의 개수의 비가 처음에는 2 : 3 : 4였다. 전체 구슬의 개수는 변함없이 각 상자에서 구슬을 꺼내 다른 상자에 넣는 시행을 반복한 후, P, Q, R에 들어 있는 구슬의 개수의 비를 구했더니 3 : 2 : 5가 되었다. P상자에 들어 있는 구슬의 개수가 처음보다 7개가 늘었다면 R상자에 들어있는 구슬의 개수의 변화는?

① 처음보다 7개 줄었다.
② 처음보다 6개 줄었다.
③ 개수의 변화가 없다.
④ 처음보다 5개 늘었다.
⑤ 처음보다 8개 늘었다.

해설

전체 구슬의 개수를 x라 하면 조건에서
P상자의 구슬이 7개 늘었으므로

$$\frac{3x}{10}-\frac{2x}{9}=7$$

$\therefore\ x=90$ (개)

따라서 R 상자의 구슬의 개수는 시행 전

: $4\times\frac{90}{9}=40$ (개)

시행 후 : $5\times\frac{90}{10}=45$ (개) 이므로

시행 후에 처음보다 5개가 늘었다.

14. 점근선이 $x = 4$, $y = -1$이고, 점 $(6, 0)$을 지나는 유리함수 $f(x)$의 $-2 \le x \le 2$에서의 최댓값을 M, 최솟값을 m이라 할 때, Mm의 값은?

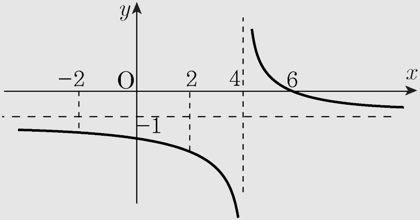
① $\frac{2}{3}$ ② $\frac{4}{3}$ ③ $-\frac{2}{3}$ ④ $-\frac{4}{3}$ ⑤ $\frac{8}{3}$

해설

$$y = \frac{k}{x-4} - 1, \ (k \neq 0)$$

$$0 = \frac{k}{6-4} - 1 \ \therefore \ k = 2$$

$$f(x) = \frac{2}{x-4} - 1$$



$$x = -2 \text{일 때, } M = \frac{2}{-2-4} - 1 = -\frac{4}{3}$$

$$x = 2 \text{일 때, } m = \frac{2}{2-4} - 1 = -2$$

$$\therefore \ Mm = -\frac{4}{3} \times (-2) = \frac{8}{3}$$

15. $x^2+6x+4=0$의 두 근이 a, b일 때, $\dfrac{\sqrt{b}}{\sqrt{a}}+\dfrac{\sqrt{a}}{\sqrt{b}}$의 값은?

① -3 ② $-\dfrac{3}{2}$ ③ -1 ④ $\dfrac{3}{2}$ ⑤ 3

해설

$x^2+6x+4=0$

$a+b=-6,\ ab=4 \Rightarrow a<0,\ b<0$

$$\frac{\sqrt{b}}{\sqrt{a}}+\frac{\sqrt{a}}{\sqrt{b}}=\frac{(\sqrt{b})^2+(\sqrt{a})^2}{\sqrt{a}\sqrt{b}}=\frac{b+a}{-\sqrt{ab}}$$

$$\therefore\ \frac{-6}{-2}=3$$

16. $x = \sqrt[3]{\sqrt{3}+2} - \sqrt[3]{\sqrt{3}-2}$ 일 때, $x^4 + 2x^3 - 3x^2 - 10x - 4$ 의 값을 구하면?

① 4　② 3　③ 2　④ 1　⑤ 0

해설

$x = \sqrt[3]{\sqrt{3}+2} - \sqrt[3]{\sqrt{3}-2}$ 에서

$\sqrt[3]{\sqrt{3}+2} = a,\ \sqrt[3]{\sqrt{3}-2} = b$ 라 하면

$x = a - b,\ ab = -1$

$$\begin{aligned} x^3 &= (a-b)^3 \\ &= a^3 - b^3 - 3ab(a-b) \\ &= \sqrt{3} + 2 - (\sqrt{3} - 2) + 3x = 4 + 3x \end{aligned}$$

$\therefore\ x^3 - 3x - 4 = 0$

$$\begin{aligned} \therefore\ & x^4 + 2x^3 - 3x^2 - 10x - 4 \\ &= (x^3 - 3x - 4)(x+2) + 4 \\ &= 0 + 4 = 4 \end{aligned}$$

17. $\sqrt{x+2} = x+k$가 서로 다른 두 개의 근을 가질 때 실수 k 의 값의 범위는 ? (단, k 는 상수)

① $2 < k < \frac{9}{4}$ ② $2 \leq k < \frac{9}{4}$ ③ $k > \frac{9}{4}$

④ $k < 2$ ⑤ $2 < k \leq \frac{9}{4}$

해설

$y = \sqrt{x+2} \cdots\cdots\cdots$ ①

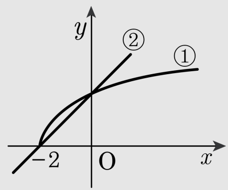
$y = x+k \cdots\cdots\cdots$ ② 라 하면

그림에서 ②의 그래프는 기울기가 1 이고

k 값의 변화에 따라 달라진다.

그런데 곡선 ①과 직선 ②가 서로 접하는

경우는



$\sqrt{x+2} = x+k \rightarrow x+2 = (x+k)^2 \rightarrow x^2+2kx+k^2-x-2=0$

$\rightarrow x^2 + (2k-1)x + k^2 - 2 = 0 \cdots\cdots\cdots$ ③

①, ②가 서로 접하려면 ③의 $\mathrm{D} = 0$ 이어야 한다.

$\therefore (2k-1)^2 - 4(k^2-2) = 0,\ 4k^2 - 4k + 1 - 4k^2 + 8 = 0$

$-4k + 9 = 0,\ 4k = 9$

$\therefore k = \frac{9}{4}$

또 직선 ②가 $(-2,\ 0)$ 을 지날 경우

$0 = -2 + k$

$\therefore k = 2$

따라서 구하는 k 의 범위는 $2 \leq k < \frac{9}{4}$

18. $f(x) = \sqrt{x-1}+1$과 그 역함수를 $g(x)$라 할 때 $g(x)$와 $f(x)$, $g(x)$의 교점 사이의 거리를 각각 옳게 구한 것은?

① $g(x) = x^2 - 2x + 2,\ \sqrt{3}$
② $g(x) = x^2 - 2x + 2,\ \sqrt{2}$
③ $g(x) = x^2 - 2x + 1,\ \sqrt{2}$
④ $g(x) = x^2 - 2x + 1,\ \sqrt{3}$
⑤ $g(x) = x^2 - 2x + 1,\ \sqrt{5}$

해설

$f(x) = \sqrt{x-1}+1$ 에 대하여

i) $y = \sqrt{x-1}+1$로 놓고 역함수를 구하면

$y-1 = \sqrt{x-1}$ $\cdots\cdots$ ㉠

㉠을 제곱하면

$(y-1)^2 = x-1,\ y^2-2y+1 = x-1,\ x = y^2-2y+2$

$\therefore\ g(x) = x^2-2x+2$

ii) $f(x)$와 역함수 $g(x)$의 교점은

$f(x)$와 $y=x$ 또는 $g(x)$ 와 $y=x$의 교점을

구하면 된다.

$g(x) = x$에서 $x^2-2x+2 = x$

$x^2-3x+2=0$, $(x-2)(x-1)=0$

그러므로 $x=2$ or $x=1$에서 $y=2$ or $y=1$

따라서 두 점$(1,\ 1)$, $(2,\ 2)$사이의 거리는

$\sqrt{(2-1)^2+(2-1)^2} = \sqrt{2}$

19. 토정비결에서는 다음 조건에 맞는 3개의 수 A, B, C로 각 사람의 그 해의 운세 | A | B | C |를 결정한다.

(1) A는 태어난 해에 해당하는 수를 3으로 나눈 나머지 (2) B는 태어난 달에 해당하는 수를 6으로 나눈 나머지 (3) C는 태어난 날에 해당하는 수를 8로 나눈 나머지

토정비결에 있는 서로 다른 운세 | A | B | C |는 모두 몇 가지인가? (단, 나머지가 0인 경우에는 나누는 수를 나머지로 한다)

① 64가지 ② 144가지 ③ 127가지

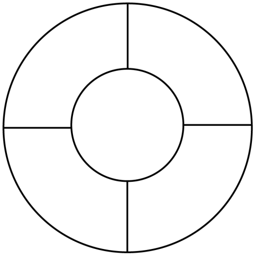
④ 216가지 ⑤ 254가지

해설

A는 1, 2, 3 총 3가지, B는 1부터 6까지 총 6가지, C는 1부터 8까지 총 8가지

따라서 총 가지 수는 $3 \times 6 \times 8 = 144$가지

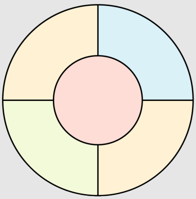
20. 다음의 원형 판에 서로 다른 4 가지의 색을 칠하려고 한다. 접한 부분은 서로 다른 색을 칠하고, 4 가지 색을 모두 사용한다고 할 때, 칠하는 방법의 수는? (단 회전해서 같은 모양이 나오면 같다고 생각한다.)



① 12 ② 16 ③ 20 ④ 23 ⑤ 24

해설

접한 곳은 다른 색을 칠하고 4 가지 색을 모두 사용하기 위해서는 서로 마주 보는 부분 1 쌍은 항상 같은 색이어야 한다.



또한 서로 다른 색인 마주보는 1 쌍은 서로 자리를 바꾸어도 같은 경우가 되므로, 가운데 부분부터 선택할 수 있는 각 색의 수는

$$\frac{4\times3\times2\times1}{2}=12$$

$\therefore$ 12 가지