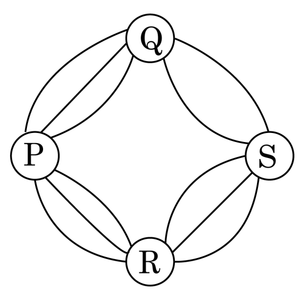
1. 네 지점 P, Q, R, S 를 연결하는길이 아래 그림과 같다. 같은 지점을 두 번 이상 지나지 않고 P 에서 S 로가는 길을 택하는 방법은 몇가지인지 구하여라.



▶ 답 : 가지

▷ 정답 : 15 가지

해설

(1) $P \to Q \to S$ 인 경우 $3 \times 2 = 6$ (가지)
(2) $P \to R \to S$ 인 경우 $3 \times 3 = 9$ (가지)
이때, (1)과 (2)는 동시에 일어나지 않으므로, 구하는 방법의 수는 $6 + 9 = 15$ (가지) 이다.

2. 다음 그림과 같이 1부터 6까지의 번호가 붙어 있는 동전 6개 중에서 2개를 뒤집어서 앞면과 뒷면의 개수가 변하지 않게 하려 한다. 서로 다른 방법은 모두 몇 가지 있는가?

1	2	3
앞	뒤	앞
4	5	6
뒤	앞	앞

① 4가지　② 8가지　③ 12가지
④ 16가지　⑤ 24가지

해설

앞면과 뒷면의 개수가 변하지 않으려면, 앞면 하나와 뒷면 하나를 뒤집어야 한다.
따라서 $4 \times 2 = 8$ 가지

3. 2000 의 양의 약수 중 제곱수가 아니면서 짝수인 것의 개수는?

① 4 ② 6 ③ 8 ④ 10 ⑤ 12

해설

$2000 = 2^4 \cdot 5^3$ 의 양의 약수는
$2^j \cdot 5^k (0 \le j \le 4, 0 \le k \le 3)$ 의 형태이다.
그러므로 제곱수가 아니면서 짝수인 것은
$2 \cdot 5^k (k = 0, 1, 2, 3)$
$2^2 \cdot 5^k \ (k = 1,\ 3)$
$2^3 \cdot 5^k \ (k = 0,\ 1,\ 2,\ 3)$
$2^4 \cdot 5^k (k = 1, 3)$ 의 형태이므로
구하는 개수는 $4 + 2 + 4 + 2 = 12$ (개)

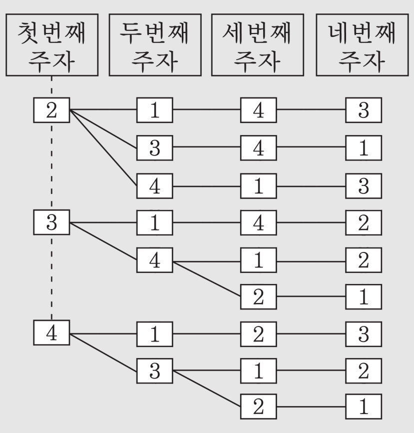
4. 등 번호가 ①, ②, ③, ④ 인 네 명이 이어달리기 순서를 결정하려고 한다. 네 명 모두 자신의 등 번호와 달리는 순서의 번호가 서로 같지 않도록 순서를 결정하는 방법의 수는?

▶ 답 : ______ 개

▷ 정답 : 9 개

해설

첫 번째 주자로 등번호가 ① 인 사람이 올 수 없고, 두 번째, 세 번째, 네 번째 주자로 각각 등번호가 ②, ③, ④ 인 사람이 올 수 없다. 이와 같은 조건에 맞는 수형도를 생각해 보면 다음과 같다.



따라서, 구하는 방법의 수는 9 (가지) 이다.

5. 100 원짜리 동전 3 개, 50 원짜리 동전 3 개, 10 원짜리 동전 3 개를 가지고 지불할 수 있는 방법의 수를 a, 지불할 수 있는 금액의 수를 b 라 할 때, $a+b$ 의 값은?

① 98 ② 102 ③ 110 ④ 115 ⑤ 120

해설

동전을 사용하지 않는 것도 지불 방법이 되므로 각 동전을 사용하는 경우의 수는 $(3+1)$ 가지이다.
그러나, 금액이 모두 0 원이면 지불방법이 되지 못하므로,
$\therefore$(지불 방법의 수) $=(3+1)(3+1)(3+1)-1=63$ 지불 금액의 수는 금액이 중복되어 있으므로
100 원짜리 동전 3 개를 50 원짜리 동전 6 개로 바꿔 생각한다.
즉, 50 원짜리 동전 9 개와 10 원짜리 동전 3 개로 지불할 수 있는 경우의 수를 계산하면 된다.
$\therefore$(지불 금액의 수)$=(9+1)(3+1)-1=39$
$\therefore a+b=102$

6. 100원짜리 동전 2개, 50원짜리 동전 4개, 10원짜리 동전 4개를 가지고 지불할 수 있는 방법의 수와 지불할 수 있는 금액의 수의 합을 구하여라.

▶ 답 : ______가지

▷ 정답 : 118가지

해설

동전을 사용하지 않는 것도 지불 방법이 되므로 각각의 동전을 사용할 수 있는 경우의 수는 (각 동전의 갯수)+1가지이다.
그러나, 금액이 모두 0원이면 지불방법이 되지 못하므로,
$\therefore$(지불 방법의 수)$= (2+1)(4+1)(4+1) - 1 = 74$
50원짜리 동전이 2개가 되면 100원을 지불할 수 있으므로, 지불 금액의 수는 금액이 중복되지 않도록 100원짜리 동전 2개를 50원짜리 동전 4개로 바꿔 생각한다.
즉, 50원짜리 동전 8개와 10원짜리 동전 4개로 지불할 수 있는 경우의 수를 계산하면 된다.
$\therefore$(지불 금액의 수)$= (8+1)(4+1) - 1 = 44$

7. ‘3•6•9 게임’ 은 참가자들이 돌아가며 자연수를 1부터 차례로 말하되 3, 6, 9가 들어가 있는 수는 말하지 않는 게임이다. 예를 들면 3, 13, 60, 396, 462, 900등은 말하지 않아야 한다. ‘3•6•9 게임’ 을 할 때, 1부터 999까지의 자연수 중 말하지 않아야 하는 수의 개수를 구하여라.

▶ 답 : ______ 개

▷ 정답 : 657 개

해설

말하여야 하는 수는 3 , 6 , 9 를 제외한 7 가지 수로 이루어져 있고, 그 중 0 은 제외되므로 그 개수는 $7 \times 7 \times 7 - 1 = 342$
따라서 말하지 않아야 하는 수의 개수는
$999 - 342 = 657$

8. 토정비결에서는 다음 조건에 맞는 3개의 수 A, B, C로 각 사람의 그 해의 운세 | A | B | C |를 결정한다.

> (1) A는 태어난 해에 해당하는 수를 3으로 나눈 나머지
> (2) B는 태어난 달에 해당하는 수를 6으로 나눈 나머지
> (3) C는 태어난 날에 해당하는 수를 8로 나눈 나머지

토정비결에 있는 서로 다른 운세 | A | B | C |는 모두 몇 가지인가?
(단, 나머지가 0인 경우에는 나누는 수를 나머지로 한다)

① 64가지　② 144가지　③ 127가지
④ 216가지　⑤ 254가지

해설

A는 1, 2, 3 총 3가지, B는 1부터 6까지 총 6가지, C는 1부터 8까지 총 8가지
따라서 총 가지 수는 $3 \times 6 \times 8 = 144$가지

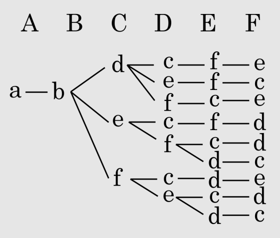
9. 수험생 6 명의 수험표를 섞어서 임의로 1 장씩 나누어 줄 때 6 명 중 어느 2 명이 자기 수험표를 받을 경우의 수를 구하면?

① 60가지　② 85가지　③ 120가지

④ 135가지　⑤ 145가지

해설

A, B, C, D, E, F 의 6 명과 수험표를 a, b, c, d, e, f 라 하고 수형도를 그린다.



$\therefore$ (A, B) 두 명만이 자기 수험표를 받는 경우의 수가 9 가지이고, 또 2 명이 자기 수험표를 받는 경우의 수는 $6 \times 5 \div 2 = 15$ 가지이다.

$\therefore$ 모든 경우의 수는 $9 \times 15 = 135$(가지)

10. 10원, 100원, 500원짜리 동전이 각각 12개, 3개, 2개가 있다. 이들 동전을 사용하여 지불할 수 있는 방법의 종류를 a가지, 지불할 수 있는 금액의 수를 b가지라 할 때, $a-b$ 의 값은? (단, 0원을 지불하는 경우는 제외한다.)

① 18　② 21　③ 24　④ 27　⑤ 35

해설

(1) 각 동전을 사용하지 않는 경우도 지급방법 중에 포함되므로 각 동전수에 1을 더한 값을 곱하고 0원을 지불하는 경우는 제외하므로 3가지 동전을 모두 사용하지 않은 경우를 제한다.
$\therefore\ a = (12+1)\times(3+1)\times(2+1)-1 = 155$

(2) 10원 짜리 동전을 합하여 100원짜리 동전을 나타낼 수 있으므로 100원 짜리 동전을 10원짜리 동전으로 환산하면, 10원짜리 동전 42개, 500원 짜리 동전 2개를 지불하는 방법과 같으므로
$b = (42+1)\times(2+1)-1 = 128$

$\therefore a-b = 155-128 = 27$

11. 100 원짜리 동전 2 개, 50 원짜리 동전 3 개, 10 원짜리 동전 4 개를 사용하여 거스름돈 없이 지불하는 경우에 지불방법의 수를 a, 지불금액의 수를 b 라 할 때, $a+b$ 의 값을 구하여라.

▶ 답: ______ 가지

▷ 정답: 98 가지

해설

10 원, 50 원, 100 원짜리 동전을 각각 x 개, y 개, z 개 사용한다고 하면,

1) 지불방법의 수는
$x = 0, 1, 2, 3, 4$
$y = 0, 1, 2, 3$
$z = 0, 1, 2$
중에서 $x = y = z = 0$ 을 제외한 지불방법의 총 가짓수 a 는,
$a = 5 \times 4 \times 3 - 1 = 59$ (가지)

2) 지불금액의 수를 구할 때 50 원짜리가 3 개이므로 이 중 2 개를 합하면 100 원짜리 하나와 같으므로 100 원짜리 동전 2 개를 50 원짜리 동전 4 개로 바꾸어 생각한다.
즉, 50 원짜리 7 개, 10 원짜리 4 개로 계산하는 금액과 동일하다.
$x = 0, 1, 2, 3, 4$
$y = 0, 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7$
중에서 $x = y = z = 0$ 을 제외한 지불금액의 총 가짓수 b 는,
$b = 5 \times 8 - 1 = 39$

$\therefore a + b = 59 + 39 = 98$

해설

a 를 구하기 위하여 동전 1 개, 2 개, $\cdots\cdots$ 9 개로 각각 만들 수 있는 금액의 경우를 알아보면,

동전 1 개 $\Rightarrow$ $10, 50, 100$
동전 2 개 $\Rightarrow$ $20, 60, 100, 110, 150, 200$
동전 3 개 $\Rightarrow$ 30, 70, 110, 120, 150, 160, 200, 210, 250
동전 4 개 $\Rightarrow$ 40, 80, 120, 130, 160, 170, 210, 220, 250, 260, 300
동전 5 개 $\Rightarrow$ 90, 130, 140, 170, 180, 220, 230, 260, 270, 310, 350
동전 6 개 $\Rightarrow$ 140, 180, 190, 230, 240, 270, 280, 320, 360
동전 7 개 $\Rightarrow$ $190, 240, 280, 290, 330, 370$
동전 8 개 $\Rightarrow$ $290, 340, 380$
동전 9 개 $\Rightarrow$ 390

이상에서, 지불방법의 총 가짓수 a 는,
$a = 3 + 6 + 9 + 11 + 11 + 9 + 6 + 3 + 1 = 59$ (가지)

12. 10원짜리 동전 2개, 50원짜리 동전 3개, 100원짜리 동전 1개의 일부 또는 전부를 사용하여 지불할 수 있는 방법의 수를 a, 지불할 수 있는 금액의 수를 b라 할 때, $a-b$의 값은?

① 4 ② 5 ③ 6 ④ 7 ⑤ 8

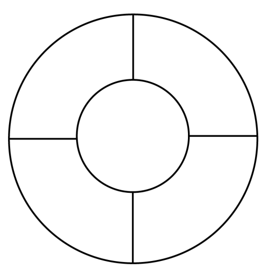
해설

10 원짜리로 지불할 수 있는 금액은
0원, 10원, 20원
50 원짜리로 지불할 수 있는 금액은
0원, 50원, 100원, 150원
100원짜리로 지불할 수 있는 금액은
0원, 100원

(1) 지불할 수 있는 방법의 수 : $3\times4\times2-1=23$
(2) 지불할 수 있는 금액의 수 : 50원짜리 2개로 지불하는 금액과 100원짜리 1개로 지불하는 금액이 같으므로 100원짜리 동전 1개를 50원짜리 동전 2개로 바꾸면 지불할 수 있는 금액의 수는 10원짜리 동전 2개, 50원짜리 동전 5개의 지불방법의 수와 같다.

10원짜리 지불 방법 3가지
50원짜리 지불 방법 6가지
지불하지 않는 방법 1가지 $\therefore\ 3\times6-1=17$
$\therefore\ a-b=23-17=6$

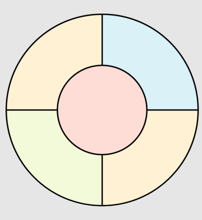
13. 다음의 원형 판에 서로 다른 4 가지의 색을 칠하려고 한다. 접한 부분은 서로 다른 색을 칠하고, 4 가지 색을 모두 사용한다고 할 때, 칠하는 방법의 수는? (단 회전해서 같은 모양이 나오면 같다고 생각한다.)



① 12　② 16　③ 20　④ 23　⑤ 24

해설

접한 곳은 다른 색을 칠하고 4 가지 색을 모두 사용하기 위해서는 서로 마주 보는 부분 1 쌍은 항상 같은 색이어야 한다.

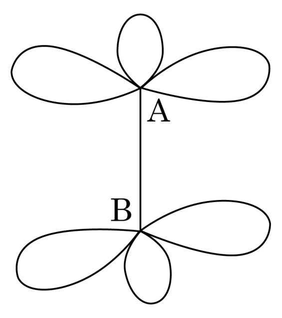


또한 서로 다른 색인 마주보는 1 쌍은 서로 자리를 바꾸어도 같은 경우가 되므로, 가운데 부분부터 선택할 수 있는 각 색의 수는

$\frac{4 \times 3 \times 2 \times 1}{2} = 12$

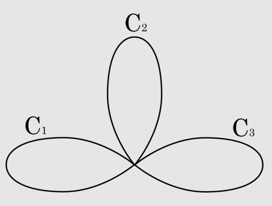
$\therefore$ 12 가지

14. 다음 그림과 같이 도형을 그리는데 연필을 떼지 않고 한 번에 그리는 방법의 수는? (A 또는 B 에서 시작한다.)



① 4588 ② 4592 ③ 4600 ④ 4608 ⑤ 4612

해설



A 에서 B 로 가는 방법의 수를 생각한다.
C_1, C_2, C_3 의 순으로 그리는 방법 :
각각을 시계 방향, 반시계 방향으로 그릴 수 있으므로
$2\times2\times2=8$
C_1, C_2, C_3 를 선택하여 배열하는 방법의 수 : $3!=6$
따라서 $(8\times6)^2=2304$
그런데 B 에서 A 로 그리는 방법도 있으므로
$2304\times2=4608$

15. 어떤 원자의 전자들은 에너지의 증감에 따라 세 가지 상태 a, b, c로 바뀐다. 이 때, 다음 규칙이 적용된다고 하자.

> 규칙1: 에너지가 증가하면 b상태의 전자는 c상태로 올라가고, a상태의 전자 중 일부는 b상태로, 나머지는 c상태로 올라간다.
>
> 규칙2: 에너지가 감소하면 b상태의 전자는 a상태로 내려가고, c상태의 전자 중 일부는 b상태로, 나머지는 a상태로내려간다.

<단계1>에서 전자는 a상태에 있다. 에너지가 증가하여 <단계2>가 되면 이 전자는 b상태 또는 c상태가 된다. 이때, 이 전자가 취할 수 있는 변화의 경로는 $a \rightarrow b$와 $a \rightarrow c$의 2가지이다. 다시 에너지가 감소하여 <단계3>이 되면, 이 때까지의 가능한 변화 경로는 $a \rightarrow b \rightarrow a$, $a \rightarrow c \rightarrow b$, $a \rightarrow c \rightarrow a$의 3가지이다. 이와 같이 순서대로 에너지가 증감을 반복할 때, <단계1>부터 <단계7>까지 이 전자의 가능한 변화 경로의 수는?

① 18　② 19　③ 20　④ 21　⑤ 22

해설

단계 1 : 1가지,
단계 2 : 2가지,
단계 3 : 3가지,
단계 4 : 5가지 ⋯
즉, 피보나치 수열을 이룬다.
따라서 1, 2, 3, 5, 8, 13, 21, ⋯⋯
∴ 단계 7 : 21