1. 함수 $y=\dfrac{bx+2}{ax-1}$의 정의역은 $x\neq 1$인 모든 실수이고 치역은 $y\neq 2$인 모든 실수이다. 이때, $a+b$의 값은?

① 1 ② 2 ③ 3 ④ 4 ⑤ 5

해설

정의역은 $x\neq 1$인 모든 실수이고 치역은 $y\neq 2$인 모든 실수이므로,
$a=1,\ b=2$이다.
$\therefore a+b=1+2=3$

2. 유리함수 $y = \dfrac{4x+3}{x+2}$ 의 그래프는 함수 $y = \dfrac{a}{x}$ 의 그래프를 x축의 방향으로 b만큼, y축의 방향으로 c만큼 평행 이동한 것이다. 이 때 $a+b+c$의 값은?

① -4 ② -3 ③ -2 ④ -1 ⑤ 0

해설

$y = \dfrac{4x+3}{x+2} = \dfrac{4(x+2)-5}{x+2} = 4 + \dfrac{-5}{x+2}$ 이므로

$y = \dfrac{-5}{x}$ 의 그래프를 x축 방향으로 -2,

y축 방향으로 4만큼 평행이동한 것이므로

$a+b+c = (-5)+(-2)+4 = -3$

3. 평행이동 $f : (x,\ y) \to (x+m,\ y+n)$ 에 의하여 분수함수 $y = \dfrac{x+1}{x}$ 의 그래프가 분수함수 $y = \dfrac{-x+3}{x-2}$ 의 그래프로 옮겨질 때, $m-n$ 의 값을 구하여라.

▶ 답 :

▷ 정답 : 4

해설

분수함수 $y = \dfrac{x+1}{x} = \dfrac{1}{x} + 1$ 의 그래프를
x 축의 방향으로 m 만큼,y 축의 방향으로
n 만큼 평행이동한 그래프의 식은
$y = \dfrac{1}{x-m} + 1 + n$이 식이
$y = \dfrac{-x+3}{x-2} = \dfrac{-(x-2)+1}{x-2} = \dfrac{1}{x-2} - 1$ 과 같으므로
$m = 2,\ 1+n = -1$ 에서 $n = -2$
$\therefore\ m-n = 4$

4. 점 $(0,1)$을 지나고 점근선이 $x=-2,\ y=2$인 함수 $y=\dfrac{ax+b}{cx+d}$의 그래프는 다음 중 어느 것을 평행이동한 것인가?

① $y=-\dfrac{1}{x}$　② $y=-\dfrac{2}{x}$　③ $y=-\dfrac{3}{x}$

④ $y=\dfrac{1}{x}$　⑤ $y=\dfrac{2}{x}$

해설

$y=\dfrac{ax+b}{cx+d}$의 점근선이 $x=-2,\ y=2$이므로

$y=\dfrac{k}{(x+2)}+2$로 놓을 수 있고

이것이 점$(0,1)$를 지나므로

$1=\dfrac{k}{2}+2$

$\therefore\ k=-2$

따라서 $y=\dfrac{-2}{x+2}+2$이므로

이 그래프는 $y=-\dfrac{2}{x}$의 그래프를 x축의 방향으로

-2만큼 y축의 방향으로 2만큼 평행이동한

그래프이다.

5. 함수 $y=\dfrac{ax+b}{x+c}$ 의 그래프가 점 $(1,\ 0)$ 을 지나고, 점근선의 방정식이 $x=2$, $y=1$ 일 때, abc 의 값을 구하여라.

▶ 답 :

▷ 정답 : 2

해설

점근선이 $x=2,\ y=1$ 이므로

$y=\dfrac{k}{x-2}+1\cdots①$

①이 $(1,\ 0)$ 을 지나므로

$0=-k+1\ \therefore\ k=1$

$y=\dfrac{1+x-2}{x-2}=\dfrac{x-1}{x-2}$

$\therefore\ a=1,\ b=-1,\ c=-2$

따라서 $abc=2$

6. 다음 중 함수 $y=\dfrac{3x}{x-3}$ 의 그래프가 지나지 않는 사분면은?

① 제1사분면 ② 제2사분면

③ 제3사분면 ④ 제4사분면

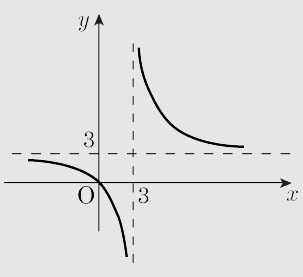
⑤ 모든 사분면을 지난다.

해설

$y=\dfrac{3x}{x-3}$

$y=\dfrac{3(x-3)+9}{x-3}$

$y=\dfrac{9}{x-3}+3$



따라서 제3사분면을 지나지 않는다.

7. 분수함수 $y=\dfrac{x+2}{x+1}$의 그래프에 대한 설명 중 옳지 않은 것을 모두 고른 것은?

㉠ $y=\dfrac{1}{x}$의 그래프를 x축으로 -1, y축으로 1만큼 평행이동한 그래프이다.
㉡ 두 점근선의 교점은 $(-1,\ 1)$이다.
㉢ 두 직선 $y=-x-2,\ y=x+2$에 대해 대칭인 곡선이다.

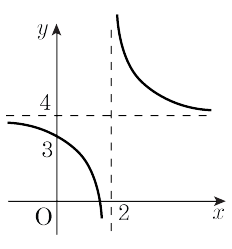
① ㉢ ② ㉠, ㉡ ③ ㉠, ㉢
④ ㉡, ㉢ ⑤ ㉠, ㉡, ㉢

해설

$y=\dfrac{x+2}{x+1}=\dfrac{1}{x+1}+1$

㉠ 이 분수함수는 $y=\dfrac{1}{x}$을 x축으로 -1,
y축으로 1만큼 평행이동 시킨 것이다.
㉡ 점근선이 $x=-1,\ y=1$이므로 교점은 $(-1,1)$
㉢ 대칭되는 직선은 기울기가 ±1이고 $(-1,1)$을
지나는 직선이다.
$\Rightarrow\ \ y=-x,\ \ y=x+2$

8. 함수 $y=\dfrac{ax+b}{x+c}$ 의 그래프가 다음과 같을 때, $a+b+c$ 의 값은?



① -6 ② -5 ③ -4

④ -3 ⑤ -2

해설

$y=4+\dfrac{k}{x-2}$, $(k\neq 0)$가 점 $(0,\ 3)$을 지나므로

$3=4+\dfrac{k}{0-2}$, $\quad k=2$

따라서 $y=4+\dfrac{2}{x-2}=\dfrac{4x-6}{x-2}$

$\therefore\ \ a=4,\ b=-6,\ c=-2$

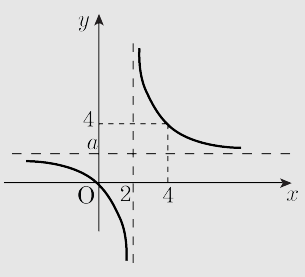
$\therefore\ \ a+b+c=-4$

9. $2 < x \leq 4$에서, 유리함수 $y = \dfrac{4}{x-2} + a$의 최솟값이 4이다. a의 값은?

① 1 ② 2 ③ 3 ④ 4 ⑤ 5

해설

점근선이 $x = 2$, $y = a$이고,
$2 < x \leq 4$일 때 최솟값이 4이므로
점 $(4, 4)$를 지난다.



$4 = \dfrac{4}{4-2} + a \therefore\ a = 2$

10. 분수함수 $f(x) = \dfrac{1}{1+\dfrac{1}{1+x}}$에 대하여 $f(x)+g(x)=1$을 만족하는 $g(x)$는?

① $x+2$ ② $x+1$ ③ $\dfrac{1}{x+2}$ ④ $\dfrac{1}{x+1}$ ⑤ $\dfrac{1}{x}$

해설

$$\begin{aligned}
f(x) &= \frac{1}{1+\dfrac{1}{1+x}} \\
&= \frac{1}{\dfrac{1+x+1}{1+x}} \\
&= \frac{x+1}{x+2} \\
&= 1-\frac{1}{x+2} \\
\therefore g(x) &= 1-f(x) \\
&= 1-\left(1-\frac{1}{x+2}\right) \\
&= \frac{1}{x+2}
\end{aligned}$$

11. 유리함수 $f(x)=\dfrac{kx}{x+3}$ 의 그래프가 직선 $y=x$에 대하여 대칭일 때, 실수 k의 값은?

① -5 ② -3 ③ -1 ④ 1 ⑤ 3

해설

$f(x)=\dfrac{kx}{x+3}$가 직선 $y=x$에 대해 대칭이므로

$f(x)=f^{-1}(x)$, $f^{-1}(x)=\dfrac{-3x}{x-k}$

$\dfrac{kx}{x+3}=\dfrac{-3x}{x-k}$

$\therefore\ k=-3$

12. 분수함수 $y=\dfrac{x-4}{x-1}$ 의 정의역이 $\{x \mid -2 \le x \le 0\}$ 일 때, 다음 중 치역을 바르게 구한 것은?

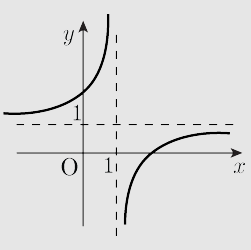
① $\{y \mid -2 \le y \le 0\}$ ② $\{y \mid -2 \le y \le 2\}$

③ $\{y \mid -2 \le y \le 4\}$ ④ $\{y \mid 0 \le y \le 2\}$

⑤ $\{y \mid 2 \le y \le 4\}$

해설

$y=\dfrac{x-4}{x-1}=\dfrac{(x-1)-3}{x-1}=1+\dfrac{-3}{x-1}$



$x=-2$ 일 때, $y=\dfrac{-2-4}{-2-1}=2$ 이고,

$x=0$ 일 때, $y=\dfrac{-4}{-1}=4$ 이므로,

치역은 $\{y \mid 2 \le y \le 4\}$

13. 함수 $y = \dfrac{1}{x+2} + 2$의 그래프가 $y = ax + b,\ y = cx + d$에 대하여 대칭이 될 때, $a + b + c + d$의 값을 구하여라. (단, $a > 0$)

▶ 답 :

▷ 정답 : 4

해설

점근선의 교점이 $(-2,\ 2)$이므로
두 직선 $y = ax + b$ 와 $y = cx + d$에 대하여
대칭이 되려면 $a = 1,\ c = -1$
따라서 $y - 2 = x + 2$ 또는 $y - 2 = -(x + 2)$
$\therefore\ y = x + 4$ 또는 $y = -x$
$\therefore\ b = 4,\ d = 0$
$\therefore\ a + b + c + d = 4$

14. 분수함수 $y=\dfrac{x-1}{x-2}$의 그래프가 직선 $y=-x+k$에 대하여 대칭일 때, 상수 k의 값을 구하여라.

① -1 ② 1 ③ 3 ④ 5 ⑤ 7

해설

$y=\dfrac{x-1}{x-2}$

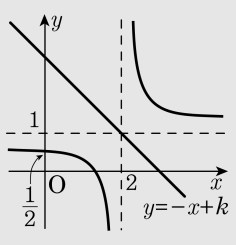
$=\dfrac{(x-2)+1}{x-2}$

$=\dfrac{1}{x-2}+1$

따라서, 점근선이

$x=2$, $y=1$인 분수함수이므로 그래프는

다음과 같다.



다음 그래프가 직선 $y=-x+k$에 대하여

대칭이려면

직선이 두 점근선의 교점인 $(2,\ 1)$을 지나야 하므로

$1=-2+k$

$\therefore\ k=3$

15. 다음 중 지나지 않는 사분면이 같은 것끼리 짝지은 것은?

㉠ $y=\dfrac{1}{x-2}-1$	㉡ $y=\dfrac{4}{x+2}-1$
㉢ $y=\dfrac{2}{x-3}-1$	㉣ $y=\dfrac{-2}{x-1}+1$

① ㉠, ㉡ ② ㉠, ㉢ ③ ㉠, ㉣ ④ ㉡, ㉢ ⑤ ㉡, ㉣

해설

㉠, ㉢는 제2사분면을 지나지 않는다.
㉡는 모든 사분면을 지난다.
㉣는 제3사분면을 지나지 않는다.

16. 분수함수 $f(x)=\dfrac{x-1}{x+1}$ 의 그래프와 $g(x)=\dfrac{1}{f(x)}$ 의 그래프에 대한 <보기>의 설명 중 옳은 것을 모두 고른 것은?

보기

Ⅰ. $f(0)=g(0)=-1$
Ⅱ. $y=f(x)$ 의 그래프와 $y=g(x)$ 의 그래프는 서로 y 축에 대하여 대칭이다.
Ⅲ. $y=f(x-1)$ 의 그래프와 $y=g(x+1)$ 의 그래프의 점근선은 같다.

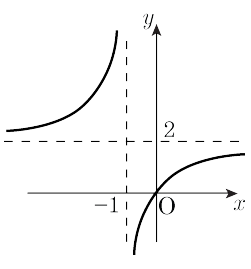
① Ⅰ ② Ⅰ, Ⅱ ③ Ⅰ, Ⅲ
④ Ⅱ, Ⅲ ⑤ Ⅰ, Ⅱ, Ⅲ

해설

Ⅰ. $f(0)=-1,\ g(0)=\dfrac{1}{f(0)}=-1$
$\therefore f(0)=g(0)=-1$ -<참>
Ⅱ. $y=f(x)$ 의 그래프를 y 축에 대하여 대칭이동한 것은 $y=f(-x)$ 이므로
$y=f(-x)=\dfrac{-x-1}{-x+1}$
$=\dfrac{x+1}{x-1}$
$=\dfrac{1}{f(x)}$
$=g(x)$ -<참>
Ⅲ. $y=f(x-1)=\dfrac{x-2}{x}=1-\dfrac{2}{x}$
따라서, 점근선은 $x=0, y=1$
$y=g(x+1)=\dfrac{x+2}{x}=1+\dfrac{2}{x}$
따라서 점근선은 $x=0, y=1$ -<참>
따라서 옳은 것은 (Ⅰ), (Ⅱ), (Ⅲ) 이다.

17. 함수 $y=\dfrac{cx+b}{x+a}$ 의 그래프가 그림과 같을 때, $a+b+c$의 값은?

① 1 ② 2 ③ 3 ④ 4 ⑤ 5



해설

점근선이 $x=-1, y=2$이므로 $y=2+\dfrac{k}{x+1}$, $(k\neq 0)$

점 $(0,\ 0)$을 지나므로 $k=-2$

따라서 $y=2+\dfrac{-2}{x+1}=\dfrac{2x}{x+1}$

$\therefore\ a=1,\ b=0,\ c=2$

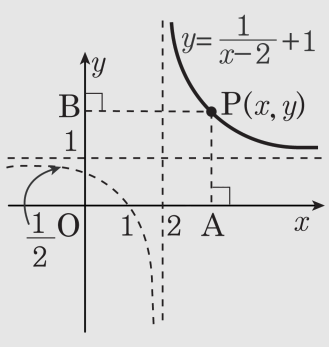
$\therefore\ a+b+c=3$

18. 분수함수 $y = \dfrac{1}{x-2} + 1 (x > 2)$ 의 그래프 위의 한 점 P(x, y) 에서 x 축, y 축에 내린 수선의 발을 각각 A, B 라 하자. 이 때, $\overline{PA} + \overline{PB}$ 의 최솟값을 구하여라.

▶ 답 :

▷ 정답 : 5

해설



위 그림에서 $\overline{PA} = y = \dfrac{1}{x-2} + 1$ $\overline{PB} = x (x > 2)$

$\therefore\ \overline{PA} + \overline{PB} = x + \dfrac{1}{x-2} + 1 = x - 2 + \dfrac{1}{x-2} + 3$

$\geq 2\sqrt{(x-2) \cdot \dfrac{1}{x-2}} + 3 = 5$

(단, 등호는 $x - 2 = \dfrac{1}{x-2}$ 일 때 성립)

19. 함수 $y=-\frac{2}{x}+2$의 그래프와 직선 $y=2x+k$가 서로 만나지 않을 때, 정수 k의 개수는?

① 3 개 ② 4 개 ③ 5 개 ④ 6 개 ⑤ 7 개

해설

$-\frac{2}{x}+2=2x+k$ 에서 $-2+2x=2x^2+kx$

$2x^2+(k-2)x+2=0$이 이차방정식의 판별식을

D라 하면 $D=(k-2)^2-16<0$에서

$k^2-4k-12<0,\ (k+2)(k-6)<0$

$\therefore\ -2<k<6$

따라서 이를 만족하는 정수 k의 값은

$-1,\ 0,\ 1,\ 2,\ 3,\ 4,\ 5$의 7개이다.

20. $2 \le x \le 3$ 에서 부등식 $ax+1 \le \dfrac{x+1}{x-1} \le bx+1$ 이 항상 성립할 때, a 의 최댓값과 b 의 최솟값의 합을 구하면?

① $\dfrac{1}{3}$ ② $\dfrac{2}{3}$ ③ 1 ④ $\dfrac{4}{3}$ ⑤ $\dfrac{5}{3}$

해설

$y = \dfrac{x+1}{x-1} = \dfrac{x-1+2}{x-1} = \dfrac{2}{x-1} + 1$

따라서, 분수함수 $y = \dfrac{x+1}{x-1}$ 의 그래프는

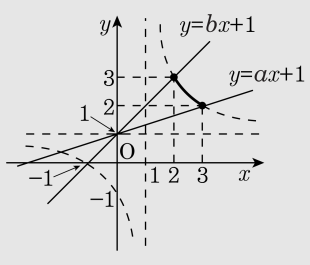
$y = \dfrac{2}{x}$ 의 그래프를 x 축의 방향으로

1 만큼, y 축의 방향으로 1 만큼 평행이동한 것이다.

두 직선 $y = ax+1$, $y = bx+1$ 은 a, b 의 값에

관계없이 점 $(0, 1)$ 을 지나는 직선이므로

$2 \le x \le 3$ 에서 $ax+1 \le \dfrac{x+1}{x-1} \le bx+1$ 이 항상 성립하려면 다음 그림에서 $a \le \dfrac{1}{3}$, $b \ge 1$



따라서, a 의 최댓값은 $\dfrac{1}{3}$, b 의 최솟값은 1 이므로 그 합은 $\dfrac{4}{3}$

21. $x^2 \neq 1$이고 $f(x) = \dfrac{x+1}{x-1}$이라 할 때 $f(-x)$는?

① $\dfrac{1}{f(x)}$　② $-f(x)$　③ $\dfrac{1}{f(-x)}$

④ $-f(-x)$　⑤ $f(x)$

해설

$f(x) = \dfrac{x+1}{x-1}$에서

$f(-x) = \dfrac{-x+1}{-x-1} = \dfrac{x-1}{x+1} = \dfrac{1}{\left(\dfrac{x+1}{x-1}\right)} = \dfrac{1}{f(x)}$

22. 분수함수 $f(x)=\dfrac{ax+5}{bx+c}$의 그래프는 점 $(1,1)$을 지나고 점근선의 방정식이 $x=\dfrac{1}{2}, y=-\dfrac{1}{3}$이다. $f(x)$의 역함수를 $g(x)$라 할 때 $g(0)$은?

① $-\dfrac{1}{2}$ ② $\dfrac{5}{2}$ ③ 3 ④ 4 ⑤ $\dfrac{22}{5}$

해설

$y=\dfrac{ax+5}{bx+c}$에서

점근선 $x=-\dfrac{c}{b}=\dfrac{1}{2}$, $y=\dfrac{a}{b}=-\dfrac{1}{3}$

$(1,\ 1)$을 지나므로

$1=\dfrac{a+5}{b+c}$

$2c=-b,\ 3a=-b,\ c=-3$

$\therefore y=\dfrac{-2x+5}{6x-3}$

$y^{-1}=\dfrac{3x+5}{6x+2}$

$g(x)=\dfrac{3x+5}{6x+2}$

$\therefore\ g(0)=\dfrac{5}{2}$