

1. x 에 대한 이차방정식 $x^2 - 15x + k = 0$ 의 두 근이 ${}_nC_1, {}_nC_2$ 일 때, 상수 k 의 값은?

① 14

② 26

③ 36

④ 44

⑤ 50

해설

이차방정식의 근과 계수의 관계에 의하여

$${}_nC_1 + {}_nC_2 = 15$$

$$n^2 + n - 30 = 0, (n + 6)(n - 5) = 0$$

$$n > 0 \text{ 이므로 } n = 5$$

따라서, 두 근은 ${}_5C_1 = 5, {}_5C_2 = 10$ 이므로

$$k = 5 \cdot 10 = 50$$

2. 다음 보기 중 옳은 것을 모두 고른 것은?

보기

ㄱ. ${}_3nC_{n-1} = {}_3nC_{2n+1}$

ㄴ. ${}_{4n}P_{3n} = (3n)! \times {}_{4n}C_n$

ㄷ. ${}_{2n+1}C_{n+2} = {}_{2n}C_{n-1} + {}_{2n}C_{n-2}$ (단, $n \geq 2$)

① ㄱ

② ㄱ, ㄴ

③ ㄱ, ㄷ

④ ㄷ

⑤ ㄱ, ㄴ, ㄷ

해설

㉠ ${}_nC_r = {}_nC_{n-r}$ 이므로

$${}_3nC_{n-1} = {}_3nC_{3n-(n-1)} = {}_3nC_{2n+1} \text{ (참)}$$

㉡ ${}_nC_r = \frac{{}_nP_r}{r!}$ 에서

$${}_nP_r = r! \times {}_nC_r$$

$${}_{4n}P_{3n} = (3n)! \times {}_{4n}C_{3n}$$

$$= (3n)! \times {}_{4n}C_{4n-3n}$$

$$= (3n)! \times {}_{4n}C_n \text{ (참)}$$

㉢ ${}_nC_r = {}_{n-1}C_{r-1} + {}_{n-1}C_r$ 이므로

$${}_{2n+1}C_{n+2} = {}_{2n}C_{n+1} + {}_{2n}C_{n+2}$$

$$= {}_{2n}C_{2n-(n+1)} + {}_{2n}C_{2n-(n+2)}$$

$$= {}_{2n}C_{n-1} + {}_{2n}C_{n-2} \text{ (참)}$$

따라서 옳은 것은 ㉠, ㉡, ㉢ 이다.

3. 다음 등식을 만족시키는 n 의 값을 구하여라.

$${}_{n+2}C_4 = 11 {}_nC_2$$

▶ 답 :

▷ 정답 : $n = 10$

해설

$${}_{n+2}C_4 = \frac{(n+2)(n+1)n(n-1)}{4 \cdot 3 \cdot 2 \cdot 1},$$

$${}_nC_2 = \frac{n(n-1)}{2 \cdot 1} \text{ 이므로 조건식은}$$

$$\frac{(n+2)(n+1)n(n-1)}{4 \cdot 3 \cdot 2 \cdot 1} = 11 \times \frac{n(n-1)}{2 \cdot 1}$$

$n \geq 2$ 이므로 양변을 $n(n-1)$ 로 나누면

$$(n+2)(n+1) = 12 \cdot 11$$

$$\therefore (n-10)(n+13) = 0$$

$$n+13 \neq 0 \text{ 이므로 } n-10 = 0$$

$$\therefore n = 10$$

4. 다음 등식 중 옳지 않은 것은?

① ${}_nC_0 = {}_nC_n$

② ${}_nP_r = {}_nC_r \times r!$

③ ${}_{n-1}C_r + {}_{n-1}C_{r-1} = {}_nC_r$

④ ${}_{n+1}C_r = {}_{n+1}C_{n-r}$

⑤ ${}_nC_r = \frac{n!}{(n-r)!r!}$

해설

④ ${}_{n+1}C_r = {}_{n+1}C_{n+1-r}$ (거짓)

5. 자연수 n 에 대하여 ${}_{n+3}C_3 + \frac{{}_{n+3}C_2}{3} = \frac{32}{3}(n+3)$ 이 성립할 때, n 의 값을 구하여라.

▶ 답 :

▷ 정답 : $n = 6$

해설

$${}_{n+3}C_3 = \frac{{}_{n+3}P_3}{3!} = \frac{(n+1)(n+2)(n+3)}{6},$$
$${}_{n+3}C_2 = \frac{{}_{n+3}P_2}{2!} = \frac{(n+2)(n+3)}{2},$$
$${}_{n+3}C_3 + \frac{{}_{n+3}C_2}{3} = \frac{32}{3}(n+3) \text{ 에서}$$
$$\frac{(n+1)(n+2)(n+3)}{6} + \frac{(n+2)(n+3)}{6} = \frac{32}{3}(n+3)$$

양변에 $\frac{6}{n+3}$ 을 곱하여 정리하면

$$n^2 + 4n - 60 = 0, (n-6)(n+10) = 0$$
$$\therefore n = 6$$

6. 등식 ${}_9P_5 = {}_9C_4 \times k!$ 을 만족하는 자연수 k 의 값은?

- ① 3 ② 4 ③ 5 ④ 6 ⑤ 7

해설

$$\begin{aligned} {}_9P_5 &= {}_9C_5 \times 5! = {}_9C_4 \times 5! \\ \therefore k &= 5 \end{aligned}$$

7. 등식 ${}_nP_2 + 6{}_nC_2 = 12{}_{n-1}C_3$ 을 만족하는 n 의 값은?

① 3

② 4

③ 5

④ 6

⑤ 7

해설

$$n(n-1) + 3n(n-1) = 2(n-1)(n-2)(n-3)$$

n 에 관하여 방정식을 풀면, $n = 6$