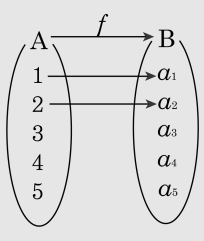
1. 집합 $A = \{1, 2, 3, 4, 5\}$ 에서 집합 $B = \{a_1, a_2, a_3, a_4, a_5\}$ 로의 대응 f 중 $f(1) = a_1,\ f(2) = a_2$ 인 함수 f 의 개수는?

① 8 개　② 25 개　③ 64 개

④ 81 개　⑤ 125 개

해설

$f(1) = a_1,\ f(2) = a_2$ 인 함수
$f : A \to B$ 는 다음 그림에서 A 의 원소 3, 4, 5 에 B 의 원소 a_1, a_2, a_3, a_4, a_5 중 하나를 각각 대응시키면 된다.
따라서, 구하는 함수의 개수는 $5 \times 5 \times 5 = 125$ (개)



2. 집합 $X = \{-1, 0, 1\}$ 에 대하여 함수 f 가 $f : X \to X$ 라 할 때, $\{f(-1)+1\}\{f(1)-1\} \neq 0$ 을 만족하는 함수 f 의 개수를 구하시오.

▶ 답:

▷ 정답: 12

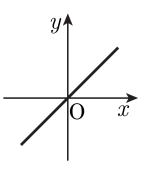
해설

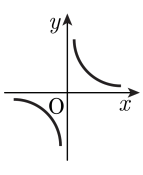
$f(-1) \neq -1$, $f(1) \neq 1$ 이므로
X의 원소 -1, 0, 1에 대응할 수 있는 경우의 수가
각각 2, 3, 2 가지이다.
$\therefore 2 \times 3 \times 2 = 12$

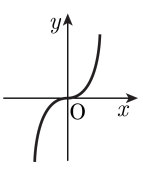
해설

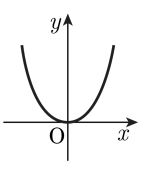
함수 f 의 개수는 모두 27 개이다.
i) $f(-1) = -1$ 인 함수의 개수는 9 개
ii) $f(1) = 1$ 인 함수의 개수는 9 개
iii) $f(-1) = -1$, $f(1) = 1$ 인 함수의 개수는 3 개
$\therefore\ 27 - (9 + 9 - 3) = 12$

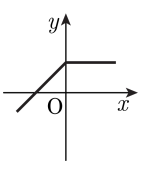
3. 다음 중 임의의 실수 x 에 대하여 $(f \circ f)(x) = x$를 만족시키는 함수 $f(x)$ 의 그래프의 개형으로 적당한 것은?

① 

② 

③ 

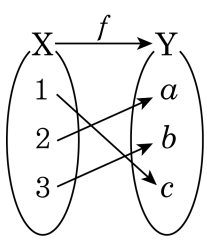
④ 

⑤ 

해설

$(f \circ f)(x) = f(f(x)) = x$ 이므로
$f(x) = f^{-1}(x)$ 이다.
그런데 $y = f(x)$ 의 그래프와
$y = f^{-1}(x)$ 의 그래프는
직선 $y = x$에 대하여 대칭이므로
$f(x) = f^{-1}(x)$를 만족시키려면
함수 $f(x)$는 일대일대응이고
$y = f(x)$의 그래프는 직선 $y = x$에 대하여
대칭이어야 한다.

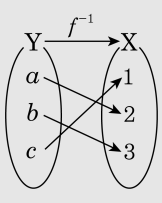
4. 두 집합 $X=\{1,2,3\}$, $Y=\{a,b,c\}$에 대하여 함수 $f: X \to Y$가 그림과 같이 주어질 때, $f^{-1}(a)+f^{-1}(c)$의 값은 얼마인가?



① 2 ② 3 ③ 4 ④ 5 ⑤ 6

해설

역함수 f^{-1} 는 그림과 같으므로



$f^{-1}(a)+f^{-1}(c)=2+1=3$

5. 점 $P(1,\ 2)$ 는 함수 $y=\sqrt{ax+b}$ $(a\neq 0)$ 의 그래프 위에 있고, 또 그 역함수의 그래프 위에도 있다고 한다. ab 의 값은 ?

① 20 ② -20 ③ -21 ④ 21 ⑤ 24

해설

점 $P(1,\ 2)$ 가 $y=\sqrt{ax+b}$ 의 그래프 위에 있으므로 $\sqrt{a+b}=2$
$\therefore a+b=4\cdots$㉠
점 $P(1,\ 2)$ 가 $y=\sqrt{ax+b}$ 의 역함수의 그래프 위에 있으므로
점 $(2,1)$ 이 $y=\sqrt{ax+b}$ 위에 있다.
즉, $\sqrt{2a+b}=1$
$\therefore 2a+b=1\cdots$㉡
㉠, ㉡ 에서 $a=-3,\ b=7$
$\therefore ab=-21$

6. 두 함수 $f(x)=2x-1, g(x)=x+2$ 에 대하여 $(f\circ g)^{-1}(-2)$ 의 값은 얼마인가?

① $-\frac{5}{2}$ ② $-\frac{3}{2}$ ③ $\frac{3}{2}$ ④ $\frac{5}{2}$ ⑤ $\frac{7}{2}$

해설

$(f\circ g)(x)=h(x)$ 라 하자.
$h(x)=f(g(x))=2(x+2)-1=2x+3$
$h(x)$ 의 역함수를 구하면
$y=2x+3$
$\Rightarrow \quad x=2y+3$
$\Rightarrow \quad y=\frac{1}{2}x-\frac{3}{2} \quad \Rightarrow \quad h^{-1}(x)=\frac{1}{2}x-\frac{3}{2}$
$\therefore \quad h^{-1}(-2)=-\frac{5}{2}$

7. 함수 $y = \sqrt{x-1} + 2$ 의 역함수를 $g(x)$ 라 할 때 $g(3)$ 의 값은?

① 3　　② 2　　③ 0

④ $2+\sqrt{2}$　　⑤ 4

해설

$y = \sqrt{x-1} + 2$ 에서

$y-2 = \sqrt{x-1}$ 이 식의 양변을 제곱하면

$y^2 - 4y + 4 = x - 1$

$x = y^2 - 4y + 4 + 1$

따라서 $g(x) = x^2 - 4x + 5$ $(x \geq 2)$ 이므로

$g(3) = 3^2 - 4 \cdot 3 + 5 = 9 - 12 + 5 = 2$

8. 함수 $f(x) = \sqrt{x-1} + 2$에서 $f^{-1}(4)$의 값은?

① 4 ② 5 ③ 6 ④ 7 ⑤ 8

해설

$f(x) = \sqrt{x-1} + 2$ 에서 $f^{-1}(4) = k$로 놓으면
$f(k) = 4$
$\sqrt{k-1} + 2 = 4$, $\sqrt{k-1} = 2$
$k - 1 = 4$에서 $k = 5$
$\therefore\ f^{-1}(4) = 5$

9. 한 개의 주사위를 두 번 던질 때, 나온 눈의 합이 5의 배수가 되는 경우의 수를 구하여라.

▶ 답 : 가지

▷ 정답 : 7가지

해설

눈의 합이 5인 경우 :
순서쌍 $(1,4),(2,3),(3,2),(4,1)$ 의 4가지
눈의 합이 10인 경우 :
순서쌍 $(4,6),(5,5),(6,4)$ 의 3가지
$\therefore\ 4+3=7$(가지)

10. 두 개의 주사위를 동시에 던질 때, 나오는 눈의 합이 6 또는 8 이 되는 경우는 모두 몇 가지인가?

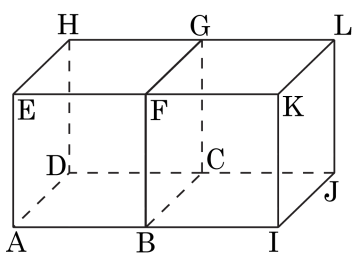
▶ 답 : 가지

▷ 정답 : 10 가지

해설

두 주사위의 눈의 수를 순서쌍 (x, y) 로 나타내면 눈의 합이 6 인 경우, 즉 $x + y = 6$ 인 경우는
$(1, 5)$, $(2, 4)$, $(3, 3)$, $(4, 2)$, $(5, 1)$ $\cdots$ 5 가지
눈의 합이 8 인 경우, 즉 $x + y = 8$ 인 경우는
$(2, 6)$, $(3, 5)$, $(4, 4)$, $(5, 3)$, $(6, 2)$ $\cdots$ 5 가지이고
이들은 동시에 일어나지 않으므로 구하는 경우의 수는 $5+5 = 10$ (가지)

11. 두 개의 정육면체가 서로 붙어 있는 아래 그림에서 A 에서부터 L 까지 모서리를 따라 최단 거리로 가는 방법 중 B 를 통과하지 않는 방법의 수를 구하면?

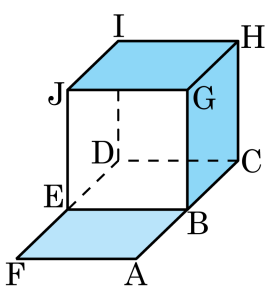


① 4 ② 6 ③ 8 ④ 12 ⑤ 16

해설

위의 수형도에서 구하는 방법의 수는 6 가지이다.

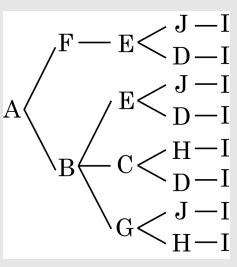
12. 다음그림은 정육면체의 뚜껑이 열려 있는 상태를 나타낸 것이다. A 에서 I 까지 최단 거리로 모서리를 따라가는 방법의 수는?



① 8 ② 9 ③ 10 ④ 11 ⑤ 12

해설

A 에서 *I* 까지 최단 거리로 수형도를 그려보면



위의 수형도에서 구하는 방법의 수는 8가지이다.

13. 10000 원짜리 지폐 3 장, 5000 원짜리 지폐 3 장, 1000 원짜리 지폐 4 장이 있다. 이 지폐의 일부 또는 전부를 사용하여 지불할 수 있는 금액의 수를 구하여라.

▶ 답 : 가지

▷ 정답 : 49 가지

해설

10000 원짜리 1 장으로 지불하는 금액과 5000 원짜리 2 장으로 지불하는 금액이 같으므로 10000 원짜리 지폐 3 장을 5000 원짜리 지폐 6 장으로 바꾸면 지불할 수 있는 금액의 수는 5000 원짜리 지폐 9 장, 1000 원짜리 지폐 4 장의 지불 방법의 수와 같다.
5000 원짜리를 지불하는 방법의 수는
0, 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9 장의 10 가지
1000 원짜리를 지불하는 방법의 수는
0, 1, 2, 3, 4 장의 5 가지
이때, 지불하지 않는 경우가 1 가지이므로
이를 제외하면
$10 \cdot 5 - 1 = 49$

14. 100 원짜리 1 개, 50 원짜리 2 개, 10 원짜리 3 개가 있다. 일부 또는 전부를 사용하여 거스름돈 없이 지불할 때, 지불 방법의 수와 지불할 수 있는 금액의 수의 합을 구하여라.

▶ 답 : 가지

▷ 정답 : 42 가지

해설

① 100 원짜리 동전을 0 개, 1 개 사용할 수 있다. 2 가지
50 원짜리 동전을 0, 1, 2 개 사용할 수 있다. 3 가지
10 원짜리 동전을 0, 1, 2, 3 개 사용할 수 있다. 4 가지
따라서 지불 방법의 수는 $2 \times 3 \times 4 = 24$ 인데 이 중에서 0 개를 사용하는 것은 지불하는것이 아니므로 제외하면 23 가지의 지불 방법 수가 있다.

② 100 원짜리 동전을 50 원짜리 동전으로 교환하면 50 원짜리 동전이 4 개, 10 원짜리 동전이 3 개인 상황에서 지불 금액의 수는 $5 \times 4 = 20$ 가지 인데 이 중에서 서로 사용하지 않는 경우를 제외하면 19 가지이다.

①, ②에서 구하는 지불 방법의 수와 지불할 수 있는 금액의 수의 합은 23+19=42