

1. 두 집합 $X = \{1, 2, 3\}$, $Y = \{1, 2\}$ 에 대하여 X 에서 Y 로의 함수의 개수를 구하여라.

▶ 답: 개

▷ 정답: 8개

해설

1이 대응할 수 있는 원소는 1, 2의 2가지
2가 대응할 수 있는 원소는 1, 2의 2가지
3이 대응할 수 있는 원소는 1, 2의 2가지
따라서 X 에서 Y 로의 함수의 개수는
 $2 \times 2 \times 2 = 8$ (개)

2. 다음의 윗줄은 자연수, 아랫줄은 정수이다. 이 도식이 의미하는 뜻과 가장 가까운 것은?

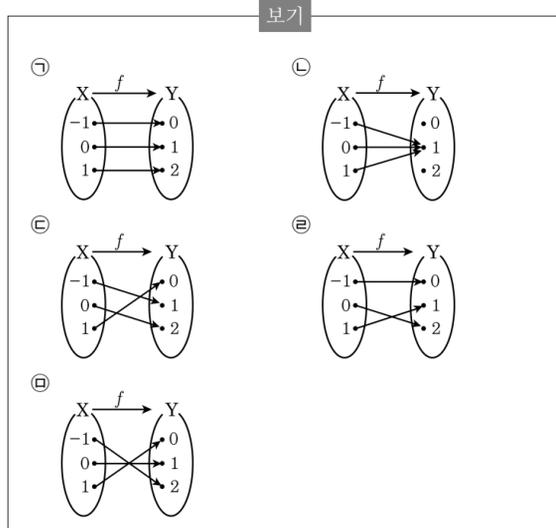
자연수; ... , 6, 4, 2, 1, 3, 5, 7, ...
↓ ↓ ↓ ↓ ↓ ↓ ↓
정수; ... , -3, -2, -1, 0, 1, 2, 3, ...

- ① 정수는 무한히 많다.
- ② 자연수는 무한히 많다.
- ③ 자연수 집합과 정수 집합 사이에는 일대일함수가 존재할 수 없다.
- ④ 자연수 집합과 정수 집합 사이에는 일대일대응이 존재한다.
- ⑤ 정수의 개수가 자연수의 개수보다 많다.

해설

문제의 대응은 자연수의 집합과 정수의 집합 사이에 서로 모자라는 것도 없고 남는 것도 없으며 2번씩 대응되는 것도 없는 대응, 즉 일대일 대응임을 알 수 있다.

3. 다음 보기의 함수가 어떤 함수인지 말한 것 중 옳지 않은 것을 모두 고르면?



- ㉠ 항등함수 ② ㉡ 상수함수
 ③ ㉢ 일대일 대응 ④ ㉣ 상수함수
 ⑤ ㉤ 일대일 대응

해설
 일대일 대응 : ㉠, ㉢, ㉤
 상수함수 : ㉡

4. 다음 두 조건을 만족하는 함수 $f: X \rightarrow Y$ 를 모두 고르면?

- (i) $f(x) = Y$ (단, $x \in X$)
(ii) $x_1 \neq x_2$ 이면 $f(x_1) \neq f(x_2)$ (단, $x_1, x_2 \in X$)

- A. $f(x) = x^2 - 1$
B. $f(x) = |x| + 2x$
C. $f(x) = x^3 + 1$
D. $f(x) = \frac{2}{x-1}$

- ① A, B ② A, C ③ B, C ④ B, D ⑤ C, D

해설

주어진 성질은 일대일대응을 말하는 것이므로
해당되는 함수는 B, C 이다.

5. 집합 $X = \{0, 1, 2\}$ 에서 세 함수 f, g, h 는 각각 X 에서 X 로의 일대일 대응, 상수함수, 항등함수이고, 다음 두 조건을 만족시킨다.

$$\begin{aligned} \neg. & f(0) = g(1) = h(2) \\ \neg. & 2f(1) + f(2) = f(0) \end{aligned}$$

이때, $f(2) + g(2) + h(2)$ 의 값은 얼마인가?

- ① 1 ② 2 ③ 3 ④ 4 ⑤ 5

해설

$h(x)$ 가 항등함수이므로 $h(2) = 2$
조건 \neg 에 의해, $f(0) = g(1) = h(2) = 2$
 $g(x)$ 는 상수함수이므로 $g(0) = g(1) = g(2) = 2$
 $f(x)$ 는 일대일 대응이고 $f(0) = 2$ 이므로
 $f(1) = 0, f(2) = 1$ 또는 $f(1) = 1, f(2) = 0$
(i) $f(1) = 0, f(2) = 1$ 일 때
 $2f(1) + f(2) = 1 \neq 2 = f(0)$
(ii) $f(1) = 1, f(2) = 0$ 일 때
 $2f(1) + f(2) = 2 = f(0)$
(i), (ii)에 의해
조건 \neg 을 만족하는 것은
 $f(1) = 1, f(2) = 0$ 일 때이다.
 $\therefore f(2) + g(2) + h(2) = 0 + 2 + 2 = 4$

6. 집합 X 에서 Y 로의 일대일 대응의 개수가 24 개일 때, 집합 X 의 부분집합의 개수를 구하면?

① 12 ② 16 ③ 24 ④ 32 ⑤ 36

해설

집합 X, Y 의 원소의 개수가
 $n(X) = n(Y) = n$ 일 때,
집합 X 에서 Y 로의 일대일 대응의 개수는
 $n(n-1)(n-2)\cdots 3\cdot 2\cdot 1$ (개)이다.
문제에서 일대일 대응의 개수가 24 이므로
 $\therefore n = 4$
 \therefore 집합 X 의 부분집합의 개수는
 $2^n = 2^4 = 16$ (개)

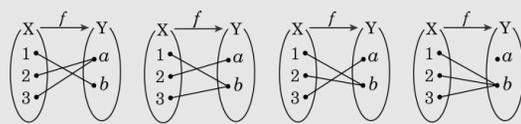
7. 두 집합 $X = \{1, 2, 3\}$, $Y = \{a, b\}$ 에 대하여 X 에서 Y 로의 함수 f 중 $f(1) = b$ 인 것의 개수를 구하여라.

▶ 답: 개

▷ 정답: 4개

해설

$f(1) = b$ 인 함수 f 는 다음과 같다
따라서, 구하는 함수 f 는 4 개이다.



8. 집합 $A = \{-1, 0, 1\}$ 에 대하여 A 에서 A 로 함수 f 중 $f(x) = f(-x)$ 를 만족시키는 것의 개수는 몇 개인가?

① 5개 ② 6개 ③ 7개 ④ 8개 ⑤ 9개

해설

-1이 대응할 수 있는 원소는 -1, 0, 1의 3가지
0이 대응할 수 있는 원소는 -1, 0, 1의 3가지
1이 대응할 수 있는 원소는
-1이 대응한 원소 1가지
따라서, 주어진 조건을 만족시키는
함수 f 의 개수는 $3 \times 3 \times 1 = 9$ (개)

9. 실수 전체의 집합 R 에서 R 로의 함수 $f(x) = a|x-1| + (2-a)x + a$ 가 일대일대응이 되기 위한 실수 a 의 값의 범위는?

① $a < -1$

② $-1 < a < 1$

③ $0 < a < 1$

④ $a < 1$

⑤ $a < -1, a > 1$

해설

$f(x)$ 가 일대일대응이 되기 위해서는
 $x \geq 1$ 에서 $f(x)$ 가 증가함수이므로
 $x < 1$ 에서도 $f(x)$ 는 증가함수이어야 한다.
 $\therefore -2(a-1) > 0$
 $\therefore a < 1$

10. $X = \{x \mid x \geq a \text{ 인 실수}\}$ 이고, $f(x) = x^2 - 6x$ 로 정의되는 함수 $f: X \rightarrow X$ 가 일대일대응이 될 때, 상수 a 의 값을 하면?

- ① 3 ② 5 ③ 6 ④ 7 ⑤ 10

해설

$X = \{x \mid x \geq a \text{ 인 실수}\}$ 이므로
일대일 대응이 되려면
 $x^2 - 6x \geq x$ 가 되어야 한다.
부등식을 풀면
 $x \leq 0$ 또는 $x \geq 7$
 $x \geq a$ 이므로 $x \geq 7$ 을 만족하는 x 의 최솟값이 a 가 된다.
 $\therefore a = 7$

12. 두 집합 $A = \{-1, 0, 1\}$, $B = \{-2, -1, 0, 1, 2\}$ 에서 A 의 모든 원소 x 에 대하여 $f(x) = f(x^2)$ 으로 되는 A 에서 B 로의 함수 f 의 개수는?

- ① 12 개 ② 20 개 ③ 25 개 ④ 27 개 ⑤ 30 개

해설

$f(-1) = f(1), f(0) = f(0)$ 이므로
 A 의 원소 1이 대응하는 방법의 수는 5 가지
 A 의 원소 0이 대응하는 방법의 수는 5 가지
 $\therefore 5 \times 5 = 25$ (가지)