

1. 두 집합 $X = \{1, 2, 3\}$, $Y = \{1, 2\}$ 에 대하여 X 에서 Y 로의 함수의 개수를 구하여라.

▶ 답 : 개

▷ 정답 : 8 개

해설

1이 대응할 수 있는 원소는 1, 2의 2가지
2가 대응할 수 있는 원소는 1, 2의 2가지
3이 대응할 수 있는 원소는 1, 2의 2가지
따라서 X 에서 Y 로의 함수의 개수는
 $2 \times 2 \times 2 = 8(\text{개})$

2. 다음의 윗줄은 자연수, 아랫줄은 정수이다. 이 도식이 의미하는 뜻과 가장 가까운 것은?

자연수; $\dots, 6, 4, 2, 1, 3, 5, 7, \dots$

$\downarrow \quad \downarrow \quad \downarrow \quad \downarrow \downarrow \downarrow \downarrow$

정수; $\dots, -3, -2, -1, 0, 1, 2, 3, \dots$

- ① 정수는 무한히 많다.
- ② 자연수는 무한히 많다.
- ③ 자연수 집합과 정수 집합 사이에는 일대일함수가 존재할 수 없다.
- ④ 자연수 집합과 정수 집합 사이에는 일대일대응이 존재한다.
- ⑤ 정수의 개수가 자연수의 개수보다 많다.

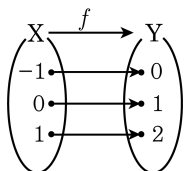
해설

문제의 대응은 자연수의 집합과 정수의 집합 사이에 서로 모자라는 것도 없고 남는 것도 없으며 2번씩 대응되는 것도 없는 대응, 즉 일대일 대응임을 알 수 있다.

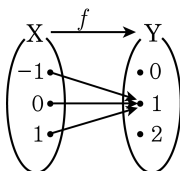
3. 다음 보기의 함수가 어떤 함수인지 말한 것 중 옳지 않은 것을 모두 고르면?

보기

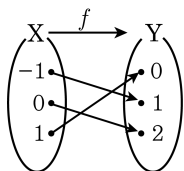
㉠



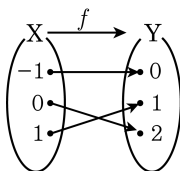
㉡



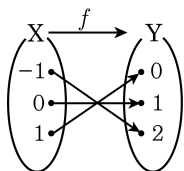
㉢



㉣



㉤



① ㉠ 항등함수

② ㉡ 상수함수

③ ㉢ 일대일 대응

④ ㉣ 상수함수

⑤ ㉤ 일대일 대응

해설

일대일 대응 : ㉠, ㉢, ㉤

상수함수 : ㉡

4. 다음 두 조건을 만족하는 함수 $f: X \rightarrow Y$ 를 모두 고르면?

(i) $f(x) = Y$ (단, $x \in X$)

(ii) $x_1 \neq x_2$ 이면 $f(x_1) \neq f(x_2)$ (단, $x, x_2 \in X$)

A . $f(x) = x^2 - 1$

B . $f(x) = |x| + 2x$

C . $f(x) = x^3 + 1$

D . $f(x) = \frac{2}{x-1}$

① A, B

② A, C

③ B, C

④ B, D

⑤ C, D

해설

주어진 성질은 일대일대응을 말하는 것이므로
해당되는 함수는 B, C 이다.

5. 집합 $X = \{0, 1, 2\}$ 에서 세 함수 f, g, h 는 각각 X 에서 X 로의 일대일 대응, 상수함수, 항등함수이고, 다음 두 조건을 만족시킨다.

$$\neg. f(0) = g(1) = h(2)$$

$$\neg. 2f(1) + f(2) = f(0)$$

이때, $f(2) + g(2) + h(2)$ 의 값은 얼마인가?

① 1

② 2

③ 3

④ 4

⑤ 5

해설

$h(x)$ 가 항등함수이므로 $h(2) = 2$

조건 $\neg$ 에 의해, $f(0) = g(1) = h(2) = 2$

$g(x)$ 는 상수함수이므로 $g(0) = g(1) = g(2) = 2$

$f(x)$ 는 일대일 대응이고 $f(0) = 2$ 이므로

$f(1) = 0, f(2) = 1$ 또는 $f(1) = 1, f(2) = 0$

(i) $f(1) = 0, f(2) = 1$ 일 때

$$2f(1) + f(2) = 1 \neq 2 = f(0)$$

(ii) $f(1) = 1, f(2) = 0$ 일 때

$$2f(1) + f(2) = 2 = f(0)$$

(i), (ii) 에 의해

조건 $\neg$ 을 만족하는 것은

$f(1) = 1, f(2) = 0$ 일 때이다.

$$\therefore f(2) + g(2) + h(2) = 0 + 2 + 2 = 4$$

6. 집합 X 에서 Y 로의 일대일 대응의 개수가 24 개일 때, 집합 X 의 부분집합의 개수를 구하면?

① 12

② 16

③ 24

④ 32

⑤ 36

해설

집합 X, Y 의 원소의 개수가

$n(X) = n(Y) = n$ 일 때,

집합 X 에서 Y 로의 일대일 대응의 개수는

$n(n-1)(n-2)\cdots 3\cdot 2\cdot 1$ (개)이다.

문제에서 일대일 대응의 개수가 24 이므로

$$\therefore n = 4$$

$\therefore$ 집합 X 의 부분집합의 개수는

$$2^n = 2^4 = 16(\text{개})$$

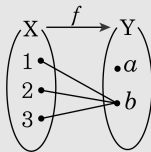
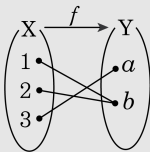
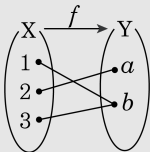
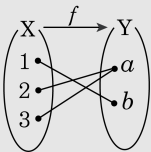
7. 두 집합 $X = \{1, 2, 3\}$, $Y = \{a, b\}$ 에 대하여 X 에서 Y 로의 함수 f 중 $f(1) = b$ 인 것의 개수를 구하여라.

▶ 답: 개

▷ 정답: 4개

해설

$f(1) = b$ 인 함수 f 는 다음과 같다
따라서, 구하는 함수 f 는 4 개이다.



8. 집합 $A = \{-1, 0, 1\}$ 에 대하여 A 에서 A 로의 함수 f 중 $f(x) = f(-x)$ 를 만족시키는 것의 개수는 몇 개인가?

① 5 개

② 6 개

③ 7 개

④ 8 개

⑤ 9 개

해설

-1 이 대응할 수 있는 원소는 -1, 0, 1 의 3 가지

0 이 대응할 수 있는 원소는 -1, 0, 1 의 3 가지

1 이 대응할 수 있는 원소는

-1 이 대응한 원소 1 가지

따라서, 주어진 조건을 만족시키는

함수 f 의 개수는 $3 \times 3 \times 1 = 9$ (개)

9. 실수 전체의 집합 R 에서 R 로의 함수 $f(x) = a|x-1| + (2-a)x + a$ 가 일대일대응이 되기 위한 실수 a 의 값의 범위는?

① $a < -1$

② $-1 < a < 1$

③ $0 < a < 1$

④ $a < 1$

⑤ $a < -1, a > 1$

해설

$f(x)$ 가 일대일대응이 되기 위해서는
 $x \geq 1$ 에서 $f(x)$ 가 증가함수이므로
 $x < 1$ 에서도 $f(x)$ 는 증가함수이어야 한다.

$$\therefore -2(a-1) > 0$$

$$\therefore a < 1$$

10. $X = \{x \mid x \geq a \text{ 인 실수}\}$ 이고, $f(x) = x^2 - 6x$ 로 정의되는 함수 $f: X \rightarrow X$ 가 일대일대응이 될 때, 상수 a 의 값을 하면?

① 3

② 5

③ 6

④ 7

⑤ 10

해설

$X = \{x \mid x \geq a \text{ 인 실수}\}$ 이므로

일대일 대응이 되려면

$x^2 - 6x \geq x$ 가 되어야 한다.

부등식을 풀면

$x \leq 0$ 또는 $x \geq 7$

$x \geq a$ 이므로 $x \geq 7$ 을 만족하는 x 의 최솟값이 a 가 된다.

$\therefore a = 7$

11. 집합 $U = \{1, 2, 3, 4\}$ 의 부분집합 X, Y 가 $X \cup Y = U$, $X \cap Y = \emptyset$ 을 만족한다고 한다. 이 때, X 에서 Y 로의 일대일 대응이 되는 함수 f 의 개수를 구하면?

▶ 답 : 개

▷ 정답 : 12 개

해설

$U = \{1, 2, 3, 4\}$ 에서 $X, Y \subset U$, $X \cup Y = U$,
 $X \cap Y = \emptyset$ 이다.

$f : X \rightarrow Y$ 이 일대일 대응이 되려면

$$n(X) = n(Y)$$

$$n(X \cup Y) = n(U) = 4, \quad X \cap Y = \emptyset \text{ 이므로}$$

$$n(X) + n(Y) = 4 \text{ 이다.}$$

$$\therefore n(X) = n(Y) = 2$$

$X = \{\{1, 2\}, \{1, 3\}, \{1, 4\}, \{2, 3\}, \{2, 4\}, \{3, 4\}\}$ 의 6 가지 경우가 생기며

X 에서 Y 로의 대응방법이 각각 2 가지씩 생기므로

$$\therefore 2 \times 6 = 12$$

12. 두 집합 $A = \{-1, 0, 1\}$, $B = \{-2, -1, 0, 1, 2\}$ 에서 A 의 모든 원소 x 에 대하여 $f(x) = f(x^2)$ 으로 되는 A 에서 B 로의 함수 f 의 개수는?

① 12 개

② 20 개

③ 25 개

④ 27 개

⑤ 30 개

해설

$f(-1) = f(1), f(0) = f(0)$ 이므로

A 의 원소 1 이 대응하는 방법의 수는 5 가지

A 의 원소 0 이 대응하는 방법의 수는 5 가지

$\therefore 5 \times 5 = 25$ (가지)