

1. 두 집합 $X = \{x \mid 0 \leq x \leq 2\}$, $Y = \{y \mid a \leq y \leq b\}$ 에서 $f : X \rightarrow Y$, $f(x) = 3x - 1$ 의 역함수 $f^{-1} : Y \rightarrow X$ 가 존재할 때, 실수 $a + b$ 의 값을 구하여라.

▶ 답 :

▷ 정답 : 4

해설

함수 $f(x)$ 는 역함수가 존재하므로 일대일 대응이다. 따라서 함수 $f(x)$ 는 점 $(0, a)$, $(2, b)$ 를 지나야 한다.

$$a = f(0) = -1, b = f(2) = 5$$

$$\therefore a + b = 4$$

2. 함수 $f(x) = ax + b$ 의 그래프와 그 역함수의 그래프가 모두 점 $(3, -2)$ 를 지날 때, $a + b$ 의 값은 얼마인가?

① -2

② 0

③ 2

④ 3

⑤ 4

해설

$y = f(x)$ 의 그래프가 점 $(3, -2)$ 를 지나므로

$$f(3) = -2 \quad \therefore 3a + b = -2 \quad \cdots \cdots \textcircled{1}$$

또, 역함수 $y = f^{-1}(x)$ 의 그래프도

점 $(3, -2)$ 를 지나므로

$$f^{-1}(3) = -2 \quad \therefore f(-2) = 3$$

$$\therefore -2a + b = 3 \quad \cdots \cdots \textcircled{2}$$

$\textcircled{1}, \textcircled{2}$ 에서 $a = -1, b = 1$

$$\therefore a + b = 0$$

3. 점 $(6, -2)$ 를 지나는 일차함수 $y = f(x)$ 의 그래프와 $y = f^{-1}(x)$ 의 그래프가 일치할 때, $f(-1)$ 의 값은?

① 1 ② 2 ③ 3 ④ 4 ⑤ 5

해설

$f = f^{-1}$ 이므로 $(f \circ f)(x) = x$
 $f(x) = a(x - 6) - 2 = ax - 6a - 2 (a \neq 0)$ 로 놓으면
 $f(f(x)) = a(ax - 6a - 2) - 6a - 2 = x$
 $\therefore a^2x - 6a^2 - 8a - 2 = x$
즉, $a^2 = 1, -6a^2 - 8a - 2 = 0$ 이므로 $a = -1$
따라서 $f(x) = -x + 4$ 이므로
 $f(-1) = -(-1) + 4 = 5$

4. 두 집합 $X = \{x \mid 1 \leq x \leq 5\}$, $Y = \{y \mid 1 \leq y \leq 3\}$ 에 대하여 X 에서 Y 로의 함수 $f(x) = ax + b$ 의 역함수가 존재할 때, 상수 a, b 에 대하여 $a^2 + b^2$ 의 값은? (단, $a > 0$)

- ① $\frac{1}{4}$ ② $\frac{1}{3}$ ③ $\frac{1}{2}$ ④ 1 ⑤ 2

해설

역함수가 존재하므로 함수 f 는 일대일대응이다.

함수 $f(x)$ 의 기울기가 양수이므로

$$f(1) = 1, f(5) = 3$$

$$f(1) = 1 \text{ 에서 } a + b = 1 \cdots \textcircled{\text{㉠}}$$

$$f(5) = 3 \text{ 에서 } 5a + b = 3 \cdots \textcircled{\text{㉡}}$$

$$\textcircled{\text{㉠}}, \textcircled{\text{㉡}} \text{을 연립하여 풀면 } a = \frac{1}{2}, b = \frac{1}{2}$$

$$\therefore a^2 + b^2 = \left(\frac{1}{2}\right)^2 + \left(\frac{1}{2}\right)^2 = \frac{1}{2}$$

5. 함수 $f(x) = 4x - 1$ 의 역함수를 $g(x)$ 라 할 때, 함수 $f(3x)$ 의 역함수를 $g(x)$ 로 나타내면 무엇인가?

① $g\left(\frac{x}{3}\right)$

② $3g(x)$

③ $g(3x)$

④ $\frac{1}{3}g(3x)$

⑤ $\frac{1}{3}g(x)$

해설

$f(x) = 4x - 1$ 에서 $f(x)$ 를 y 로 놓고

$y = 4x - 1$ 을 x 에 관하여 정리하면

$$x = \frac{1}{4}y + \frac{1}{4}$$

이 때, x 와 y 를 바꾸면

$$f^{-1}(x) = g(x) = \frac{1}{4}x + \frac{1}{4}$$

또, $f(3x) = 12x - 1$ 에서 $f(3x) = y$ 로 놓고

$y = 12x - 1$ 을 x 에 관하여 정리하면

$$x = \frac{1}{12}y + \frac{1}{12}$$

$$\therefore f^{-1}(3x) = \frac{1}{12}x + \frac{1}{12} = \frac{1}{3} \left(\frac{1}{4}x + \frac{1}{4} \right) = \frac{1}{3}g(x)$$

6. $f(x) = x^2 - 4x + 1$ ($x \geq 2$), $g(x) = 2x - 6$ 에 대하여 $(f \circ (g \circ f)^{-1})(4)$ 의 값은?

① 1

② 2

③ 3

④ 4

⑤ 5

해설

$$\begin{aligned} g(5) &= 4 \text{ 이므로 } g^{-1}(4) = 5 \\ (f \circ (g \circ f)^{-1})(4) &= (f \circ f^{-1} \circ g^{-1})(4) \\ &= g^{-1}(4) \\ &= 5 \end{aligned}$$

7. $f\left(\frac{1+\sqrt{x}}{1-\sqrt{x}}\right) = 3x-1$ 을 만족하는 $f(x)$ 에 대하여, $f^{-1}(11)$ 의 값은?

① -4

② -3

③ -2

④ -1

⑤ 0

해설

$$f^{-1}(3x-1) = \frac{1+\sqrt{x}}{1-\sqrt{x}} \text{ 이므로}$$

$$3x-1 = 11 \text{ 에서 } x = 4$$

$$\therefore f^{-1}(11) = \frac{1+\sqrt{4}}{1-\sqrt{4}} \\ = -3$$

8. $\begin{cases} 2x+1 & (x \geq 1) \\ x+2 & (x < 1) \end{cases}$ 에 대하여 $f^{-1}(5) + f^{-1}(k) = -2$ 일 때, k 의 값을 구하여라.

▶ 답 :

▷ 정답 : $k = -2$

해설

$$f(x) = \begin{cases} 2x+1 & (x \geq 1) \\ x+2 & (x < 1) \end{cases} \text{ 에서}$$

$x \geq 1$ 일 때, $f(x) \geq 3$ 이며

$x < 1$ 일 때, $f(x) < 3$ 이다.

이 때, $f^{-1}(5) + f^{-1}(k) = -2$ 에서

$f^{-1}(5) = a$ 라고 놓으면

$$f(a) = 5 \geq 3 \text{ 이므로 } f(a) = 2a + 1 = 5$$

$$\therefore a = 2$$

$$\text{그러므로 } f^{-1}(k) = -4$$

$$f(-4) = -4 + 2 = k \text{ } (\because -4 < 3)$$

$$\therefore k = -2$$

9. 함수 $f(x) = x^2 - 4x + k (x \geq 2)$ 의 그래프와 그 역함수 $y = f^{-1}(x)$ 의 그래프가 서로 다른 두 점에서 만날 때, 상수 k 의 값의 범위는?
- ① $0 < k < \frac{25}{4}$ ② $k < \frac{25}{4}$ ③ $6 \leq k \leq \frac{25}{4}$
 ④ $6 < k \leq \frac{25}{4}$ ⑤ $6 \leq k < \frac{25}{4}$

해설

주어진 함수 $y = f(x)$ 의 그래프와 그 역함수 $y = f^{-1}(x)$ 의 그래프는 직선 $y = x$ 에 대하여 대칭이므로 두 함수의 그래프의 교점은 $y = x$ 위에 있다.

따라서, 조건을 만족하려면 $f(x) = x^2 - 4x + k = (x - 2)^2 + k - 4 (x \geq 2)$ 의 그래프와 직선 $y = x$ 가 서로 다른 두 점에서 만나야 한다.

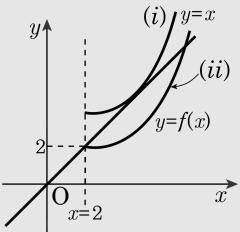
(i) $y = f(x)$ 의 그래프와 직선 $y = x$ 가 접할 때,
 $x^2 - 4x + k = x, x^2 - 5x + k = 0$
 이 이차방정식의 판별식을 D 라 하면

$$D = 5^2 - 4k = 0$$

$$\therefore k = \frac{25}{4}$$

(ii) $y = f(x)$ 의 그래프가 점 $(2, 2)$ 를 지날 때
 $2^2 - 4 \cdot 2 + k = 2$ 이므로 $k = 6$

(i), (ii) 에서 $6 \leq k < \frac{25}{4}$



10. 함수 $f(x) = x^2 - 4x + 6 (x \geq 2)$ 의 역함수를 $g(x)$ 라 할 때, $y = f(x)$ 와 $y = g(x)$ 의 그래프의 두 교점 사이의 거리를 구했을 때, 옳은 것은 무엇인가?

- ① 1
- ② $\sqrt{2}$
- ③ $\sqrt{3}$
- ④ 2
- ⑤ $\sqrt{5}$

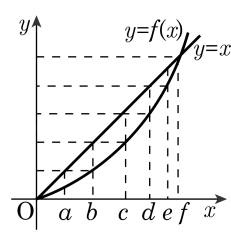
해설

$y = f(x)$ 와 $y = g(x)$ 의 그래프의 두 교점은 $y = f(x)$ 의 그래프와 직선 $y = x$ 의 교점과 같다.
 $x^2 - 4x + 6 = x$ 에서
 $x^2 - 5x + 6 = 0, (x - 2)(x - 3) = 0$
 $\therefore x = 2$ 또는 $x = 3$
따라서 $y = f(x)$ 와 $y = g(x)$ 의 그래프의 두 교점은 $(2, 2), (3, 3)$ 이고,
이 두 교점 사이의 거리는
 $\sqrt{(3 - 2)^2 + (3 - 2)^2} = \sqrt{2}$

해설

$x^2 - 4x + 6 = x$,
즉 $x^2 - 5x + 6 = 0$ 의 두 근을 α, β 라 하면
이차방정식의 근과 계수의 관계에 의하여
 $\alpha + \beta = 5, \alpha\beta = 6$
따라서 $y = f(x)$ 와 $y = g(x)$ 의
그래프의 두 교점은 $(\alpha, \alpha), (\beta, \beta)$ 사이의 거리는
 $\sqrt{(\alpha - \beta)^2 + (\alpha - \beta)^2} = \sqrt{2} \sqrt{(\alpha + \beta)^2 - 4\alpha\beta}$
 $= \sqrt{2} \sqrt{5^2 - 4 \cdot 6} = \sqrt{2}$

11. 다음 그림에서 곡선은 함수 $y = f(x)$ 의 그래프이고 직선은 $y = x$ 의 그래프이다. $(f \circ f)(d) + (g \circ g)(c)$ 를 구하면? (단, $g(x) = f^{-1}(x)$ 이다.)



- ① $2a$ ② $b + e$ ③ $c + d$
 ④ $2c$ ⑤ $b + c$

해설
 $(f \circ f)(d) = b, (g \circ g)(c) = e$
 f 와 g 는 역함수 관계. 즉 $y = x$ 에 대칭이다.

12. 집합 $S = \{1, 2, 3, 4, 5\}$ 의 두 부분집합 A, B 에 대하여 $A \cup B = S$, $A \cap B = \{5\}$ 일 때, 함수 $f: A \rightarrow B$ 가 역함수를 가지는 함수 f 의 개수를 구하시오.

▶ 답 : 개

▶ 정답 : 36개

해설

함수 $f: A \Rightarrow B$ 가 역함수를 가지므로
함수 f 는 일대일 대응이다.
 $A \cup B = S$, $A \cap B = \{5\}$ 을 만족하고
함수 f 가 일대일 대응이므로
두 집합 A, B 는 각각 5 를 원소로 가지면서
1, 2, 3, 4 중에서 서로 다른 두 개씩을 나누어 가진다.
예를 들어 $A = \{1, 2, 5\}$, $B = \{3, 4, 5\}$ 일 때와 같이 나누는 방법의
수는 6 가지이다.
한편 6 가지 각각의 경우에 일대일 대응인 함수의 개수는 모두 6
개씩 만들 수 있으므로
구하는 함수의 개수는 $6 \times 6 = 36$