

1. 두 함수 $f(x) = 2x + 6$, $g(x) = ax - 3$ 에 대하여 $(f \circ g)(1) = 4$ 가 성립할 때, 상수 a 의 값을 구하면?

① $\frac{1}{2}$

② $\frac{3}{2}$

③ $\frac{5}{3}$

④ 2

⑤ $\frac{5}{4}$

해설

$$(f \circ g)(x) = f(g(x)) = 2(ax - 3) + 6 = 2ax$$

$$(f \circ g)(1) = 2a = 4$$

$$\therefore a = 2$$

2. 정의역이 실수 전체의 집합인 함수 $f(x)$ 가 $f\left(\frac{x+4}{2}\right) = 3x + 2$ 를 만족시킨다. 이때, $f(2)$ 의 값을 구하여라.

▶ 답:

▷ 정답: 2

해설

$$f\left(\frac{x+4}{2}\right) = 3x + 2 \text{ 에서}$$

$$\frac{x+4}{2} = 2 \text{ 이면 } x = 0 \text{ 이므로}$$

$$f(2) = 3 \cdot 0 + 2 = 2$$

3. $f(x) = -2x + 3$, $g(x) = 4x + 1$ 일 때, $f \circ g \circ h = g$ 를 만족하는 일차함수 $h(x)$ 에 대하여 $h(2)$ 의 값을 구하면?

① -3

② -1

③ 0

④ 2

⑤ 3

해설

$h(x) = ax + b$ 라고 놓고

$$(g \circ h)(x) = 4(ax + b) + 1 = 4ax + 4b + 1$$

$$\begin{aligned}(f \circ (g \circ h))(x) &= -2(4ax + 4b + 1) + 3 \\ &= -8ax - 8b - 2 + 3 \\ &= 4x + 1\end{aligned}$$

$$a = -\frac{1}{2}, \quad b = 0$$

$$h(x) = -\frac{1}{2}x$$

$$h(2) = -1$$

4. 함수 f 에 대하여 $f \circ f = f^2$, $f^2 \circ f = f^3$, $\dots$, $f^n \circ f = f^{n+1}$ 이라고 정의한다. $f(x) = x - 1$ 일 때, $f^{1998}(1)$ 의 값은?

① -1998

② -1997

③ 0

④ 1

⑤ 1998

해설

$$f(x) = x - 1$$

$$f^2(x) = f(f(x)) = (x - 1) - 1 = x - 2$$

$$f^3(x) = f^2(f(x)) = (x - 1) - 2 = x - 3$$

$$\vdots$$

$$f^n(x) = x - n \quad (n \text{ 은 정수})$$

$$f^{1998}(x) = x - 1998$$

$$\therefore f^{1998}(1) = -1997$$

5. 함수 $f(x) = \frac{x}{x-1}$ 에 대하여 방정식 $(f \circ f)(x) = x^3$ 의 해의 합을 구하면?

① -2

② -1

③ 0

④ 1

⑤ 2

해설

$$(f \circ f)(x) = f(f(x)) = f\left(\frac{x}{x-1}\right)$$

$$= \frac{\frac{x}{x-1}}{\frac{\frac{x}{x-1}}{x-1} - 1} = \frac{\frac{x}{x-1}}{\frac{x-x+1}{x-1}} = x$$

$$\therefore x^3 = x, x^3 - x = 0, x(x-1)(x+1) = 0$$

$$\therefore x = -1 \text{ or } 0 \text{ or } 1$$

그런데 $x \neq 1$ 이므로 $x = -1 \text{ or } 0$

$$\therefore -1 + 0 = -1$$

6. 실수 전체의 집합에서 정의된 함수 f, g 가 $f(x) = ax + b$, $g(x) = 2x^2 + 3x + 1$ 이고, 모든 실수 x 에 대하여 $(f \circ g)(x) = (g \circ f)(x)$ 를 만족할 때, $f(1) + f(2) + f(3) + \cdots + f(10)$ 의 값은?(단, $a \neq 0$)

① 60

② 55

③ 51

④ 48

⑤ 45

해설

$$\begin{aligned}(f \circ g)(x) &= f(g(x)) = a(2x^2 + 3x + 1) + b \\ &= 2ax^2 + 3ax + a + b \cdots \cdots \textcircled{\text{㉠}}\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}(g \circ f)(x) &= g(f(x)) = 2(ax + b)^2 + 3(ax + b) + 1 \\ &= 2a^2x^2 + (4ab + 3a)x + 2b^2 + 3b + 1 \cdots \cdots \textcircled{\text{㉡}}\end{aligned}$$

모든 실수 x 에 대하여 $\textcircled{\text{㉠}} = \textcircled{\text{㉡}}$ 이므로

$$2a = 2a^2, \quad 3a = 4ab + 3a, \quad a + b = 2b^2 + 3b + 1$$

위의 식을 연립하여 풀면 $a = 1, b = 0 (\because a \neq 0)$

즉, $f(x) = x$ 이므로

$$\begin{aligned}f(1) + f(2) + f(3) + \cdots + f(10) \\ = 1 + 2 + 3 + \cdots + 10 = 55\end{aligned}$$

7. $f\left(\frac{2x-1}{3}\right) = 4-2x$ 일 때, $(f \circ f)(2)$ 의 값을 구하여라.

▶ 답 :

▷ 정답 : 12

해설

$$\frac{2x-1}{3} = t \text{ 로 놓으면}$$

$$2x-1 = 3t \text{ 이므로 } x = \frac{3t+1}{2}$$

$$f(t) = 4 - 2 \cdot \frac{3t+1}{2} = -3t + 3$$

$$\therefore (f \circ f)(2) = f(f(2)) = f(-3) = 12$$

8. 함수 $f(x) = \frac{-3x+1}{x+3}$ 에 대하여 $f^1=f$, $f^{n+1} = f \circ f^n (n = 1, 2, 3, \dots)$ 이라 할 때, $f^{2006}(-2) + f^{2007}(-2)$ 의 값은?

① 3

② 4

③ 5

④ 6

⑤ 7

해설

$$f(-2) = \frac{6+1}{-2+3} = 7$$

$$f^2(-2) = f(f(-2)) = f(7) = -2$$

$$f^3(-2) = f(f^2(-2)) = f(-2) = 7$$

$$f^4(-2) = f(f^3(-2)) = f(7) = -2$$

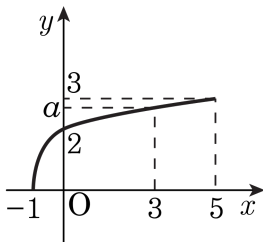
$\vdots$

$$f^{2006}(-2) = -2$$

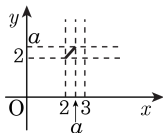
$$f^{2007}(-2) = 7$$

$$\therefore f^{2006}(-2) + f^{2007}(-2) = -2 + 7 = 5$$

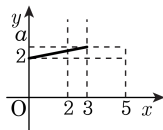
9. 실수 $-1 \leq x \leq 5$ 에서 정의된 함수 $y = f(x)$ 의 그래프가 아래 그림과 같다. 합성함수 $(f \circ f)(x)$ 의 그래프는?



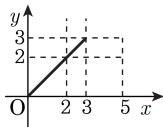
①



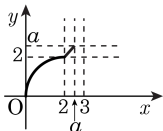
②



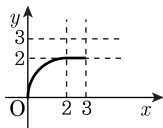
③



④



⑤



해설

실수 $-1 \leq x \leq 5$ 에서 정의된 함수 $y = f(x)$ 이므로 $(f \circ f)(x)$ 함수는 $f(f(x))$ 에서 $f(x)$ 의 치역을 정의역으로 하는 함수이다. 따라서 합성함수 $(f \circ f)(x)$ 는 $y = f(x)$ ($0 \leq x \leq 3$)가 되고 치역은 $2 \leq y \leq a$ 이다.

10. 집합 $A = \{1, 2, 3, 4\}$ 에 대하여 함수 $f : A \rightarrow A$ 를

$$f(x) = \begin{cases} x-1 & (x \geq 2) \\ 4 & (x=1) \end{cases} \quad \text{로 정의한다.}$$

이때, $f^{100}(1) - f^{100}(4)$ 의 값을 구하여라.

(단, $f^{n+1} = f \cdot f^n$ ($n = 1, 2, 3, \dots$))

▶ 답 :

▷ 정답 : -3

해설

주어진 함수는 2 이상의 숫자는 1을 빼주고,

1은 4로 대응시킴을 의미한다.

다음 그림처럼 f 를 계속 합성하면

4번째에는 모든 원소가 자기자신으로 대응한다.

$$\therefore f^4(x) = x$$

$$\therefore f^{100}(x) = f^{96}(x) = f^{92}(x) = \dots = f^4(x) = x$$

$$\therefore f^{100}(1) - f^{100}(4) = 1 - 4 = -3$$

