1. $\dfrac{3^x}{9^{-x+y}} = 27$, $\dfrac{25^{x+y}}{5^{3y}} = 625$ 일 때, $64^x \times 625^y$ 의 자리의 수를 구하면?

① 10 자리　② 12 자리　③ 17 자리
④ 20 자리　⑤ 26 자리

해설

$3^x = 27 \times 9^{-x+y} = 3^3 \times 3^{-2x+2y} = 3^{-2x+2y+3}$

$\therefore\ x = -2x + 2y + 3$

$25^{x+y} = 625 \times 5^{3y} = 5^4 \times 5^{3y} = 5^{3y+4}$

$\therefore\ 2x + 2y = 3y + 4$

두 식을 연립하면

$x = 5,\ y = 6$

$$\begin{aligned} 64^x \times 625^y &= (2^6)^5 \times (5^4)^6 = 2^{30} \times 5^{24} \\ &= (10)^{24} \times 2^6 = 64 \times 10^{24} \end{aligned}$$

따라서 26 자리의 수이다.

2. $2^{17} \times 5^{20}$ 은 n 자리의 자연수이고, 3^{2008} 의 일의 자리의 숫자는 m 일 때, $n+m$ 의 값을 구하여라.

▶ 답 :

▷ 정답 : 21

해설

$2^{17} \times 5^{20} = (2^{17} \times 5^{17}) \times 5^3 = 125 \times 10^{17}$

$\therefore\ n = 20$

3^m 의 일의 자리의 수는 3, 9, 7, 1 로 반복되고

$2008 = 4 \times 502$ 이므로 $m = 1$

$\therefore\ n + m = 21$

3. $\dfrac{2^{15} \times 15^{30}}{45^{15}}$ 은 a 자리의 수이다. 이 때, $a^2 + a + 1$ 의 값을 구하여라.

▶ 답 :

▷ 정답 : 273

해설

$\dfrac{2^{15} \times 3^{30} \times 5^{30}}{3^{30} \times 5^{15}} = 2^{15} \times 5^{15} = 10^{15}$ 이므로

$a = 16 \qquad \therefore\ a^2 + a + 1 = 273$

4. $2^{13} \times 5^{15}$ 이 n 자리의 자연수일 때, n 의 값을 구하여라.

▶ 답 :

▷ 정답 : 15

해설

$$\begin{aligned} 2^{13} \times 5^{15} &= 2^{13} \times 5^{13} \times 5^2 \\ &= (2 \times 5)^{13} \times 5^2 \\ &= 25 \times 10^{13} \end{aligned}$$

따라서 15자리의 수이므로 $n = 15$이다.

5. $\frac{1}{x} : \frac{1}{y} = 1 : 3$ 일 때, $\frac{x^2 - 2y^2}{xy}$ 의 값은?

① $-\frac{13}{3}$ ② $-\frac{12}{5}$ ③ $\frac{7}{3}$ ④ $-\frac{16}{3}$ ⑤ $-\frac{17}{3}$

해설

$\frac{1}{x} : \frac{1}{y} = 1 : 3$, $\frac{3}{x} = \frac{1}{y}$ 이므로 $x = 3y$ 이다.

$\frac{x^2 - 2y^2}{xy} = \frac{x}{y} - \frac{2y}{x} = \frac{3y}{y} - \frac{2y}{3y} = 3 - \frac{2}{3} = \frac{7}{3}$

6. $a = 2x + 1$일 때, 다음 등식을 x에 관한 식으로 나타내면?

$$(a-1)x^2 - ax + 2a - 2$$

① $-2x^3 + 2x^2 + 3x$
② $2x^3 - 2x^2 + 3x$
③ $2x^3 + 2x^2 - 3x$
④ $2x^3 + 2x^2 + 3x$
⑤ $2x^3 - 2x^2 - 3x$

해설

$a = 2x + 1$을 주어진 식에 대입하면
$(a-1)x^2 - ax + 2a - 2$
$= (2x + 1 - 1)x^2 - (2x + 1)x + 2(2x + 1) - 2$
$= 2x^3 - 2x^2 - x + 4x + 2 - 2$
$= 2x^3 - 2x^2 + 3x$

7. 아버지의 나이가 영수의 2 배이고, 영수는 어머니보다 22 살이 적다. 어머니의 나이를 x 일 때, 아버지의 나이를 x 에 관한 식으로 나타내어라.

▶ 답 :

▷ 정답 : $2x - 44$

해설

(아버지의 나이) = (영수의 나이) × 2 ⋯ ①
(영수의 나이) = (어머니의 나이) − 22 ⋯ ②
어머니의 나이를 x 라 하면 영수의 나이는 $x - 22$ 이다.
①의 식에 영수의 나이 $x - 22$ 를 대입하면 (아버지의 나이) = $(x - 22) \times 2 = 2x - 44$ 이다.

8. $A = x^2 - 2x + 5$, $B = 2x^2 + x - 3$ 일 때, $5A - (2A + B)$ 를 x 에 관한 식으로 나타내면?

① $2x^2 - 5x + 8$
② $-3x^2 - 7x - 5$
③ $x^2 + 6x + 9$
④ $-x^2 + 10x - 22$
⑤ $x^2 - 7x + 18$

해설

(준식) $= 3A - B$
$= 3(x^2 - 2x + 5) - (2x^2 + x - 3)$
$= x^2 - 7x + 18$

9. $xyz \neq 0$, $xy = a$, $yz = b$, $zx = c$일 때, $x^2 + y^2 + z^2$의 값을 a, b, c에 관하여 바르게 나타낸 것은?

① $\frac{bc}{c} + \frac{ac}{a} + \frac{ab}{b}$ ② $\frac{bc}{b} + \frac{ac}{c} + \frac{ab}{a}$ ③ $\frac{bc}{c} + \frac{ac}{b} + \frac{ab}{a}$
④ $\frac{bc}{b} + \frac{ac}{a} + \frac{ab}{c}$ ⑤ $\frac{bc}{a} + \frac{ac}{b} + \frac{ab}{c}$

해설

$x^2y^2z^2 = abc$이고

$x^2 = \frac{abc}{y^2z^2} = \frac{abc}{b^2} = \frac{ac}{b}$

$y^2 = \frac{abc}{x^2z^2} = \frac{abc}{c^2} = \frac{ab}{c}$

$z^2 = \frac{abc}{x^2y^2} = \frac{abc}{a^2} = \frac{bc}{a}$

$\therefore\ x^2 + y^2 + z^2 = \frac{ac}{b} + \frac{ab}{c} + \frac{bc}{a}$

10. $x+\frac{1}{y}=1,\ y+\frac{1}{z}=1$ 일 때, $z+\frac{1}{x}$의 값을 구하여라.

▶ 답 :

▷ 정답 : 1

해설

$x+\frac{1}{y}=1,\ y+\frac{1}{z}=1$을 x와 z를 y에 관하여 풀면 $x=\frac{y-1}{y}$,

$z=\frac{1}{1-y}$

$z+\frac{1}{x}$ 에 대입하면

$z+\frac{1}{x}=\frac{1}{1-y}+\frac{y}{y-1}=\frac{-1}{y-1}+\frac{y}{y-1}=1$

11. $(2x+y):(x-2y)=3:1$ 일 때, $\dfrac{2x+4y}{x-y}$ 의 값을 구하여라.

▶ 답 :

▷ 정답 : 3

해설

$3(x-2y)=2x+y$

$3x-6y=2x+y$

$x=7y$ 이므로 주어진 식에 대입하면

$\dfrac{2x+4y}{x-y}=\dfrac{14y+4y}{7y-y}=\dfrac{18y}{6y}=3$

12. $x-y=2$ 이고 $a=2^{3x}$, $b=2^{3y}$ 일 때, $\frac{a}{b}$ 의 값은?

① 8 ② 16 ③ 32 ④ 64 ⑤ 128

해설

$\frac{a}{b}=2^{3x-3y}=2^{3(x-y)}=2^{3\times2}=2^6=64$

13. 음이 아닌 수 a, b에 대하여 $2^a+2^b \le 1+2^{a+b}$ (단, 등호는 $a=0$ 또는 $b=0$일 때 성립)이 성립한다. $a+b+c=4$일 때, $2^a+2^b+2^c$의 최댓값을 구하여라. (단, $c \ge 0$)

▶ 답 :

▷ 정답 : 18

해설

$2^a+2^b+2^c \le 1+2^{a+b}+2^c$ (단, 등호는 $a=0$ 또는 $b=0$일 때 성립)
$2^a+2^b+2^c \le 1+(1+2^{a+b+c})$ (단, 등호는 $a+b=0$ 또는 $c=0$일 때 성립)
$2^a+2^b+2^c \le 1+(1+2^4)$
$2^a+2^b+2^c \le 18$
따라서 최댓값은 18 ($a=0$, $b=0$ 또는 $b=0$, $c=0$ 또는 $c=0$, $a=0$ 일 때)

14. $3^{x+2}+3^{x+1}+3^{x}=1053$ 일 때, x의 값을 구하여라.

▶ 답 :

▷ 정답 : 4

해설

$3^x = t$ 로 놓으면

$3^2 \times 3^x + 3 \times 3^x + 3^x$

$= 9t + 3t + t = 1053$

$13t = 1053,\ t = 81$

$3^x = 81 = 3^4$

$\therefore x = 4$

15. $3^3 \div 3^a = 27,\ 4^b + 4^b + 4^b + 4^b = 4^3$ 일 때, $a - b$ 의 값은?

① -1　② -2　③ -3　④ -4　⑤ -5

해설

$3^3 \div 3^a = 3^{3-a} = 27 = 3^3$

$3 - a = 3$

$\therefore\ a = 0$

$4^b + 4^b + 4^b + 4^b = 4 \cdot 4^b = 4^{b+1} = 4^3$

$b + 1 = 3$

$\therefore\ b = 2$

$\therefore\ a - b = -2$

16. $3^{2x+1} = 27^{x-2}$ 이 성립할 때, x 의 값을 구하여라.

▶ 답 :

▷ 정답 : 7

해설

$3^{2x+1} = (3^3)^{x-2}$

$2x + 1 = 3(x - 2)$

$\therefore x = 7$

17. 밑면의 반지름의 길이가 r 이고, 높이가 h 인 원뿔이 있다. 이 원뿔의 밑면의 반지름은 10% 늘리고, 높이는 10% 줄이면 부피는 원래 부피보다 몇 % 변화하는지 구하여라.

▶ 답 : _____ %

▷ 정답 : 8.9 %

해설

(처음 원뿔의 부피) $= \frac{1}{3} \times \pi r^2 \times h = \frac{1}{3}\pi r^2 h$

(변화된 원뿔의 부피)

$= \frac{1}{3} \times \pi \left(\frac{110}{100} \times r\right)^2 \times \left(\frac{90}{100} \times h\right)$

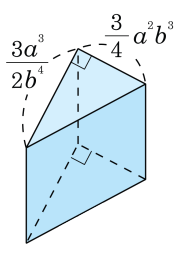
$= \frac{1}{3} \times \frac{11^2}{10^2} \times \frac{9}{10} \times \pi r^2 h$

$= \frac{1089}{1000} \times \left(\frac{1}{3}\pi r^2 h\right)$

변화된 원뿔의 부피는 처음 원뿔의 부피의 $\frac{1089}{1000}$ 배이므로 변화된 부피는

$\left(\frac{1089}{1000} - 1\right) \times 100 = 8.9(\%)$ 이다.

18. 다음 그림과 같이 밑면이 직각삼각형인 삼각기둥이 있다. 이 삼각기둥의 부피가 $\frac{3}{2}a^2b^3$ 일 때, 높이를 구하여라.



▶ 답 :

▷ 정답 : $\frac{8b^4}{3a^3}$

해설

$\frac{3}{2}a^2b^3 \times 2 \div (\frac{3a^3}{2b^4} \times \frac{3}{4}a^2b^3) = \frac{3}{2}a^2b^3 \times 2 \times \frac{2b^4}{3a^3} \times \frac{4}{3a^2b^3} = \frac{8b^4}{3a^3}$

19. 세로의 길이가 $(2ab^2)^2$ 인 직사각형의 넓이가 $(4a^2b^3)^3$ 일 때, 이 직사각형의 가로의 길이는?

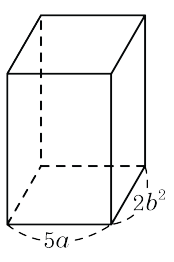
① $8a^2b^4$ ② $8a^3b^4$ ③ $16a^4b^5$
④ $20a^3b^4$ ⑤ $24a^4b^5$

해설

$(2ab^2)^2 \times$ (가로의 길이) $= (4a^2b^3)^3$ 이므로

(가로의 길이) $= 64a^6b^9 \times \dfrac{1}{4a^2b^4} = 16a^4b^5$

20. 다음 그림은 밑면의 가로의 길이가 $5a$, 세로의 길이가 $2b^2$ 인 직육면체이다. 이 직육면체의 부피가 $40a^3b^4$ 일 때, 높이는?



① $2a^2b^3$　② $3a^3b^2$　③ $4a^2b^2$　④ $5a^4b^2$　⑤ $6a^2b^5$

해설

$40a^3b^4 = 5a \times 2b^2 \times$ (높이)

(높이)$= 40a^3b^4 \div 5a \div 2b^2 = 4a^2b^2$

21. 다음 식을 전개하여라.

$(a+b+1)^2+(-a-b+1)^2-(a-b-1)^2-(a-b+1)^2$

▶ 답 :

▷ 정답 : $8ab$

해설

(준식)

$=(a+b+1)^2+(a+b-1)^2-(a-b-1)^2-(a-b+1)^2$

$=\{a+(b+1)\}^2-\{a-(b+1)\}^2+$

$\{a+(b-1)\}^2-\{a-(b-1)\}^2$

$=4a(b+1)+4a(b-1)$

$=4ab+4a+4ab-4a$

$=8ab$

22. $\left(5x-\frac{1}{2}y\right)^2$ 을 전개하면 $ax^2-5xy+by^2$ 이다. 이때, 상수 a , b에 대하여 $\frac{a}{b}$ 의 값은?

① 5　　② 10　　③ 25　　④ 100　　⑤ 125

해설

$(5x)^2-2\times5x\times\frac{1}{2}y+\left(\frac{1}{2}y\right)^2=25x^2-5xy+\frac{1}{4}y^2$

$\therefore\ \frac{a}{b}=25\times4=100$

23. 다음 중 $\left(-a+\frac{1}{2}b\right)^2$ 과 전개식이 같은 것은?

① $-\left(a-\frac{1}{2}b\right)^2$ ② $-\left(a+\frac{1}{2}b\right)^2$ ③ $\left(-a-\frac{1}{2}b\right)^2$
④ $\left(a-\frac{1}{2}b\right)^2$ ⑤ $\left(a+\frac{1}{2}b\right)^2$

해설

$$\left(-a+\frac{1}{2}b\right)^2=\left\{-\left(a-\frac{1}{2}b\right)\right\}^2=\left(a-\frac{1}{2}b\right)^2$$

24. 상수 $A,\ B,\ C$ 에 대하여 $(3x-A)^2 = 9x^2 + Bx + C$ 이고 $B = -3A - 9$ 일 때, $A + B + C$ 의 값은?

① -12　② -6　③ -2　④ 0　⑤ 2

해설

$(3x-A)^2 = 9x^2 - 6Ax + A^2 = 9x^2 + Bx + C$ $-6A = B$ 이므로

$-6A = -3A - 9$

$\therefore A = 3$

$B = -3 \times 3 - 9 = -18$

$C = A^2 = 9$

$\therefore\ A + B + C = 3 - 18 + 9 = -6$

25. $x+y=2$, $x^2+y^2=3$ 일 때, x^6+y^6 의 값을 구하여라.

▶ 답 :

▷ 정답 : $\frac{99}{4}$

해설

$x+y=2,\ x^2+y^2=3$

$(x+y)^2=x^2+2xy+y^2$

$2^2=3+2xy$

$\therefore\ xy=\frac{1}{2}$

$$\begin{aligned} x^3+y^3 &= (x+y)^3-3xy(x+y) \\ &= 2^3-3\times\frac{1}{2}\times 2=5 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \therefore x^6+y^6 &= (x^3)^2+(y^3)^2 \\ &= (x^3+y^3)^2-2(xy)^3 \\ &= 5^2-2\times\left(\frac{1}{2}\right)^3=\frac{99}{4} \end{aligned}$$

26. $(ax^3 - x^2 + 3x - 1)(2x^3 + bx^2 + 4)$ 를 전개하였을 때, x^2 의 계수는 1, x^3 의 계수는 -1 이다. 이때, a, b 의 값을 각각 구하여라.

▶ 답 :

▶ 답 :

▷ 정답 : $a = 4$

▷ 정답 : $b = -5$

해설

주어진 식에서 x^2 항은 $-4x^2 - bx^2 = (-4 - b)x^2$
따라서 $a = 4$, $b = -5$ 이다.
즉, $-4 - b = 1$ $\quad\therefore\ b = -5$
x^3 항은 $4ax^3 + 3bx^3 - 2x^3 = (4a + 3b - 2)x^3$
따라서 $4a + 3b - 2 = -1$ 이므로 $a = 4$ 이다.

27. $a+b=1$, $ab=-2$ 일 때, $a^{12}+b^{12}$ 의 값을 구하여라.

▶ 답 :

▷ 정답 : 4097

해설

$a^2+b^2=(a+b)^2-2ab=5$

$a^4+b^4=(a^2+b^2)^2-2a^2b^2=25-8=17$

$$\begin{aligned}\therefore\ a^{12}+b^{12} &= (a^4+b^4)^3-3a^4b^4(a^4+b^4)\\ &= 17^3-3(-2)^4\times 17\\ &= 4913-816=4097\end{aligned}$$

28. $(2x+ay)^2 = bx^2 + cxy + 9y^2$ 일 때, $a-b+c$ 의 값을 구하여라.(단, $a>0$)

▶ 답 :

▷ 정답 : 11

해설

$(2x+ay)^2 = 4x^2 + 4axy + a^2y^2$
$4x^2 + 4axy + a^2y^2 = bx^2 + cxy + 9y^2$
$\therefore b = 4$
$a^2 = 9$
$\therefore a = 3(\because a > 0)$
$4a = c$
$\therefore c = 12$
$a - b + c = 3 - 4 + 12 = 11$

29. $a\%$ 의 설탕물 xg 에 yg 의 물을 더 부어 $b\%$ 의 설탕물이 되었다. y 를 a, b, x 에 관한 식으로 나타내어라.

▶ 답 :

▷ 정답 : $y = \frac{ax}{b} - x$

해설

$\frac{a \times x}{100} = \frac{b \times (x+y)}{100}$

$ax = b(x+y)$

$x + y = \frac{ax}{b}$

$\therefore y = \frac{ax}{b} - x$

30. $2a-3b=1$ 일 때, $4(a-2b-1)-3(a+b)+5b$ 를 a 에 관한 식으로 나타내어라.

▶ 답 :

▷ 정답 : $-3a-2$

해설

$2a-3b=1,\ -3b=1-2a$

$\therefore\ b=\frac{2}{3}a-\frac{1}{3}$

$4(a-2b-1)-3(a+b)+5b$

$=a-11b+5b-4$

$=a-6b-4$

$a-6b-4$ 에 $b=\frac{2}{3}a-\frac{1}{3}$ 을 대입

$a-6\left(\frac{2}{3}a-\frac{1}{3}\right)-4=a-4a+2-4$

$=-3a-2$

31. $4x+3y=2$ 일 때, $5(x-3y)-2(4x-3y)$ 를 x 에 관한 식으로 나타내어라.

▶ 답 :

▷ 정답 : $9x-6$

해설

$4x+3y=2$

$\therefore\ 3y=-4x+2$

$$\begin{aligned}(\text{준식}) &= 5(x-2+4x)-2(4x-2+4x)\\ &= 5(5x-2)-2(8x-2)\\ &= 9x-6\end{aligned}$$

32. $a : b = 2 : 1$, $c : a = 2 : 3$, $b : d = 4 : 3$ 일 때, $c : d$ 를 가장 간단한 자연수의 비로 나타내어라.

▶ 답 :

▷ 정답 : $16 : 9$

해설

$a : b = 2 : 1$ 에서 $b = \frac{1}{2}a$,

$b : d = 4 : 3$ 에서 $d = \frac{3}{4}b = \frac{3}{4} \times \frac{1}{2}a = \frac{3}{8}a$,

$c : a = 2 : 3$ 에서 $c = \frac{2}{3}a$,

따라서 $c : d = \frac{2}{3}a : \frac{3}{8}a = 16 : 9$