

1. $\frac{3^x}{9^{-x+y}} = 27$, $\frac{25^{x+y}}{5^{3y}} = 625$ 일 때, $64^x \times 625^y$ 의 자리의 수를 구하면?

① 10 자리

② 12 자리

③ 17 자리

④ 20 자리

⑤ 26 자리

해설

$$3^x = 27 \times 9^{-x+y} = 3^3 \times 3^{-2x+2y} = 3^{-2x+2y+3}$$

$$\therefore x = -2x + 2y + 3$$

$$25^{x+y} = 625 \times 5^{3y} = 5^4 \times 5^{3y} = 5^{3y+4}$$

$$\therefore 2x + 2y = 3y + 4$$

두 식을 연립하면

$$x = 5, y = 6$$

$$\begin{aligned} 64^x \times 625^y &= (2^6)^5 \times (5^4)^6 = 2^{30} \times 5^{24} \\ &= (10)^{24} \times 2^6 = 64 \times 10^{24} \end{aligned}$$

따라서 26 자리의 수이다.

2. $2^{17} \times 5^{20}$ 은 n 자리의 자연수이고, 3^{2008} 의 일의 자리의 숫자는 m 일 때, $n + m$ 의 값을 구하여라.

▶ 답 :

▷ 정답 : 21

해설

$$2^{17} \times 5^{20} = (2^{17} \times 5^{17}) \times 5^3 = 125 \times 10^{17}$$

$$\therefore n = 20$$

3^m 의 일의 자리의 수는 3, 9, 7, 1 로 반복되고

$$2008 = 4 \times 502 \text{ 이므로 } m = 1$$

$$\therefore n + m = 21$$

3. $\frac{2^{15} \times 15^{30}}{45^{15}}$ 은 a 자리의 수이다. 이 때, $a^2 + a + 1$ 의 값을 구하여라.

▶ 답 :

▷ 정답 : 273

해설

$$\frac{2^{15} \times 3^{30} \times 5^{30}}{3^{30} \times 5^{15}} = 2^{15} \times 5^{15} = 10^{15} \text{ 이므로}$$

$$a = 16 \quad \therefore a^2 + a + 1 = 273$$

4. $2^{13} \times 5^{15}$ 이 n 자리의 자연수일 때, n 의 값을 구하여라.

▶ 답 :

▷ 정답 : 15

해설

$$\begin{aligned} 2^{13} \times 5^{15} &= 2^{13} \times 5^{13} \times 5^2 \\ &= (2 \times 5)^{13} \times 5^2 \\ &= 25 \times 10^{13} \end{aligned}$$

따라서 15자리의 수이므로 $n = 15$ 이다.

5. $\frac{1}{x} : \frac{1}{y} = 1 : 3$ 일 때, $\frac{x^2 - 2y^2}{xy}$ 의 값은?

① $-\frac{13}{3}$

② $-\frac{12}{5}$

③ $\frac{7}{3}$

④ $-\frac{16}{3}$

⑤ $-\frac{17}{3}$

해설

$$\frac{1}{x} : \frac{1}{y} = 1 : 3, \frac{3}{x} = \frac{1}{y} \text{ 이므로 } x = 3y \text{ 이다.}$$

$$\frac{x^2 - 2y^2}{xy} = \frac{x}{y} - \frac{2y}{x} = \frac{3y}{y} - \frac{2y}{3y} = 3 - \frac{2}{3} = \frac{7}{3}$$

6. $a = 2x + 1$ 일 때, 다음 등식을 x 에 관한 식으로 나타내면?

$$(a - 1)x^2 - ax + 2a - 2$$

① $-2x^3 + 2x^2 + 3x$

② $2x^3 - 2x^2 + 3x$

③ $2x^3 + 2x^2 - 3x$

④ $2x^3 + 2x^2 + 3x$

⑤ $2x^3 - 2x^2 - 3x$

해설

$a = 2x + 1$ 을 주어진 식에 대입하면

$$(a - 1)x^2 - ax + 2a - 2$$

$$= (2x + 1 - 1)x^2 - (2x + 1)x + 2(2x + 1) - 2$$

$$= 2x^3 - 2x^2 - x + 4x + 2 - 2$$

$$= 2x^3 - 2x^2 + 3x$$

7. 아버지의 나이가 영수의 2 배이고, 영수는 어머니보다 22 살이 적다. 어머니의 나이를 x 일 때, 아버지의 나이를 x 에 관한 식으로 나타내어라.

▶ 답:

▷ 정답: $2x - 44$

해설

$$(\text{아버지의 나이}) = (\text{영수의 나이}) \times 2 \dots \textcircled{1}$$

$$(\text{영수의 나이}) = (\text{어머니의 나이}) - 22 \dots \textcircled{2}$$

어머니의 나이를 x 라 하면 영수의 나이는 $x - 22$ 이다.

①의 식에 영수의 나이 $x - 22$ 를 대입하면 (아버지의 나이) = $(x - 22) \times 2 = 2x - 44$ 이다.

8. $A = x^2 - 2x + 5$, $B = 2x^2 + x - 3$ 일 때, $5A - (2A + B)$ 를 x 에 관한 식으로 나타내면?

① $2x^2 - 5x + 8$

② $-3x^2 - 7x - 5$

③ $x^2 + 6x + 9$

④ $-x^2 + 10x - 22$

⑤ $x^2 - 7x + 18$

해설

$$\begin{aligned}(\text{준식}) &= 3A - B \\&= 3(x^2 - 2x + 5) - (2x^2 + x - 3) \\&= x^2 - 7x + 18\end{aligned}$$

9. $xyz \neq 0$, $xy = a$, $yz = b$, $zx = c$ 일 때, $x^2 + y^2 + z^2$ 의 값을 a , b , c 에 관하여 바르게 나타낸 것은?

① $\frac{bc}{c} + \frac{ac}{a} + \frac{ab}{b}$

② $\frac{bc}{b} + \frac{ac}{c} + \frac{ab}{a}$

③ $\frac{bc}{c} + \frac{ac}{b} + \frac{ab}{a}$

④ $\frac{bc}{b} + \frac{ac}{a} + \frac{ab}{c}$

⑤ $\frac{bc}{a} + \frac{ac}{b} + \frac{ab}{c}$

해설

$$x^2 y^2 z^2 = abc \circ | \text{고}$$

$$x^2 = \frac{abc}{y^2 z^2} = \frac{abc}{b^2} = \frac{ac}{b}$$

$$y^2 = \frac{abc}{x^2 z^2} = \frac{abc}{c^2} = \frac{ab}{c}$$

$$z^2 = \frac{abc}{x^2 y^2} = \frac{abc}{a^2} = \frac{bc}{a}$$

$$\therefore x^2 + y^2 + z^2 = \frac{ac}{b} + \frac{ab}{c} + \frac{bc}{a}$$

10. $x + \frac{1}{y} = 1$, $y + \frac{1}{z} = 1$ 일 때, $z + \frac{1}{x}$ 의 값을 구하여라.

▶ 답 :

▷ 정답 : 1

해설

$x + \frac{1}{y} = 1$, $y + \frac{1}{z} = 1$ 을 x 와 z 를 y 에 관하여 풀면 $x = \frac{y-1}{y}$,

$$z = \frac{1}{1-y}$$

$z + \frac{1}{x}$ 에 대입하면

$$z + \frac{1}{x} = \frac{1}{1-y} + \frac{y}{y-1} = \frac{-1}{y-1} + \frac{y}{y-1} = 1$$

11. $(2x + y) : (x - 2y) = 3 : 1$ 일 때, $\frac{2x + 4y}{x - y}$ 의 값을 구하여라.

▶ 답 :

▷ 정답 : 3

해설

$$3(x - 2y) = 2x + y$$

$$3x - 6y = 2x + y$$

$x = 7y$ 이므로 주어진 식에 대입하면

$$\frac{2x + 4y}{x - y} = \frac{14y + 4y}{7y - y} = \frac{18y}{6y} = 3$$

12. $x - y = 2$ 이고 $a = 2^{3x}$, $b = 2^{3y}$ 일 때, $\frac{a}{b}$ 의 값은?

① 8

② 16

③ 32

④ 64

⑤ 128

해설

$$\frac{a}{b} = 2^{3x-3y} = 2^{3(x-y)} = 2^{3 \times 2} = 2^6 = 64$$

13. 음이 아닌 수 a, b 에 대하여 $2^a + 2^b \leq 1 + 2^{a+b}$ (단, 등호는 $a = 0$ 또는 $b = 0$ 일 때 성립)이 성립한다. $a + b + c = 4$ 일 때, $2^a + 2^b + 2^c$ 의 최댓값을 구하여라. (단, $c \geq 0$)

▶ 답 :

▷ 정답 : 18

해설

$2^a + 2^b + 2^c \leq 1 + 2^{a+b} + 2^c$ (단, 등호는 $a = 0$ 또는 $b = 0$ 일 때 성립)

$2^a + 2^b + 2^c \leq 1 + (1 + 2^{a+b+c})$ (단, 등호는 $a + b = 0$ 또는 $c = 0$ 일 때 성립)

$$2^a + 2^b + 2^c \leq 1 + (1 + 2^4)$$

$$2^a + 2^b + 2^c \leq 18$$

따라서 최댓값은 18 ($a = 0, b = 0$ 또는 $b = 0, c = 0$ 또는 $c = 0, a = 0$ 일 때)

14. $3^{x+2} + 3^{x+1} + 3^x = 1053$ 일 때, x 의 값을 구하여라.

▶ 답 :

▷ 정답 : 4

해설

$3^x = t$ 로 놓으면

$$3^2 \times 3^x + 3 \times 3^x + 3^x$$

$$= 9t + 3t + t = 1053$$

$$13t = 1053, t = 81$$

$$3^x = 81 = 3^4$$

$$\therefore x = 4$$

15. $3^3 \div 3^a = 27$, $4^b + 4^b + 4^b + 4^b = 4^3$ 일 때, $a - b$ 의 값은?

① -1

② -2

③ -3

④ -4

⑤ -5

해설

$$3^3 \div 3^a = 3^{3-a} = 27 = 3^3$$

$$3 - a = 3$$

$$\therefore a = 0$$

$$4^b + 4^b + 4^b + 4^b = 4 \cdot 4^b = 4^{b+1} = 4^3$$

$$b + 1 = 3$$

$$\therefore b = 2$$

$$\therefore a - b = -2$$

16. $3^{2x+1} = 27^{x-2}$ 이 성립할 때, x 의 값을 구하여라.

▶ 답 :

▷ 정답 : 7

해설

$$3^{2x+1} = (3^3)^{x-2}$$

$$2x + 1 = 3(x - 2)$$

$$\therefore x = 7$$

17. 밑면의 반지름의 길이가 r 이고, 높이가 h 인 원뿔이 있다. 이 원뿔의 밑면의 반지름은 10% 늘리고, 높이는 10% 줄이면 부피는 원래 부피보다 몇 % 변화하는지 구하여라.

▶ 답 : %

▷ 정답 : 8.9 %

해설

$$(\text{처음 원뿔의 부피}) = \frac{1}{3} \times \pi r^2 \times h = \frac{1}{3} \pi r^2 h$$

(변화된 원뿔의 부피)

$$= \frac{1}{3} \times \pi \left(\frac{110}{100} \times r \right)^2 \times \left(\frac{90}{100} \times h \right)$$

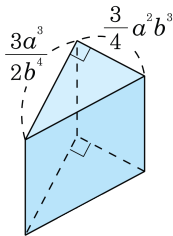
$$= \frac{1}{3} \times \frac{11^2}{10^2} \times \frac{9}{10} \times \pi r^2 h$$

$$= \frac{1089}{1000} \times \left(\frac{1}{3} \pi r^2 h \right)$$

변화된 원뿔의 부피는 처음 원뿔의 부피의 $\frac{1089}{1000}$ 배이므로 변화된 부피는

$$\left(\frac{1089}{1000} - 1 \right) \times 100 = 8.9(\%) \text{ 이다.}$$

18. 다음 그림과 같이 밑면이 직각삼각형인 삼각기둥이 있다. 이 삼각기둥의 부피가 $\frac{3}{2}a^2b^3$ 일 때, 높이를 구하여라.



▶ 답 :

▶ 정답 : $\frac{8b^4}{3a^3}$

해설

$$\frac{3}{2}a^2b^3 \times 2 \div \left(\frac{3a^3}{2b^4} \times \frac{3}{4}a^2b^3 \right) = \frac{3}{2}a^2b^3 \times 2 \times \frac{2b^4}{3a^3} \times \frac{4}{3a^2b^3} = \frac{8b^4}{3a^3}$$

19. 세로의 길이가 $(2ab^2)^2$ 인 직사각형의 넓이가 $(4a^2b^3)^3$ 일 때, 이 직사각형의 가로 길이는?

① $8a^2b^4$

② $8a^3b^4$

③ $16a^4b^5$

④ $20a^3b^4$

⑤ $24a^4b^5$

해설

$$(2ab^2)^2 \times (\text{가로의 길이}) = (4a^2b^3)^3 \text{ 이므로}$$

$$(\text{가로의 길이}) = 64a^6b^9 \times \frac{1}{4a^2b^4} = 16a^4b^5$$

20. 다음 그림은 밑면의 가로 길이가 $5a$, 세로 길이가 $2b^2$ 인 직육면체이다. 이 직육면체의 부피가 $40a^3b^4$ 일 때, 높이는?

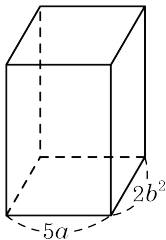
① $2a^2b^3$

② $3a^3b^2$

③ $4a^2b^2$

④ $5a^4b^2$

⑤ $6a^2b^5$



해설

$$40a^3b^4 = 5a \times 2b^2 \times (\text{높이})$$

$$(\text{높이}) = 40a^3b^4 \div 5a \div 2b^2 = 4a^2b^2$$

21. 다음 식을 전개하여라.

$$(a + b + 1)^2 + (-a - b + 1)^2 - (a - b - 1)^2 - (a - b + 1)^2$$

▶ 답 :

▷ 정답 : $8ab$

해설

(준식)

$$= (a + b + 1)^2 + (a + b - 1)^2 - (a - b - 1)^2 - (a - b + 1)^2$$

$$= \{a + (b + 1)\}^2 - \{a - (b + 1)\}^2 +$$

$$\{a + (b - 1)\}^2 - \{a - (b - 1)\}^2$$

$$= 4a(b + 1) + 4a(b - 1)$$

$$= 4ab + 4a + 4ab - 4a$$

$$= 8ab$$

22. $\left(5x - \frac{1}{2}y\right)^2$ 을 전개하면 $ax^2 - 5xy + by^2$ 이다. 이때, 상수 a, b 에 대하여 $\frac{a}{b}$ 의 값은?

① 5

② 10

③ 25

④ 100

⑤ 125

해설

$$(5x)^2 - 2 \times 5x \times \frac{1}{2}y + \left(\frac{1}{2}y\right)^2 = 25x^2 - 5xy + \frac{1}{4}y^2$$

$$\therefore \frac{a}{b} = 25 \times 4 = 100$$

23. 다음 중 $\left(-a + \frac{1}{2}b\right)^2$ 과 전개식이 같은 것은?

① $-\left(a - \frac{1}{2}b\right)^2$

② $-\left(a + \frac{1}{2}b\right)^2$

③ $\left(-a - \frac{1}{2}b\right)^2$

④ $\left(a - \frac{1}{2}b\right)^2$

⑤ $\left(a + \frac{1}{2}b\right)^2$

해설

$$\left(-a + \frac{1}{2}b\right)^2 = \left\{-\left(a - \frac{1}{2}b\right)\right\}^2 = \left(a - \frac{1}{2}b\right)^2$$

24. 상수 A, B, C 에 대하여 $(3x - A)^2 = 9x^2 + Bx + C$ 이고 $B = -3A - 9$ 일 때, $A + B + C$ 의 값은?

① -12

② -6

③ -2

④ 0

⑤ 2

해설

$$(3x - A)^2 = 9x^2 - 6Ax + A^2 = 9x^2 + Bx + C \quad -6A = B \text{ 이므로}$$
$$-6A = -3A - 9$$

$$\therefore A = 3$$

$$B = -3 \times 3 - 9 = -18$$

$$C = A^2 = 9$$

$$\therefore A + B + C = 3 - 18 + 9 = -6$$

25. $x + y = 2$, $x^2 + y^2 = 3$ 일 때, $x^6 + y^6$ 의 값을 구하여라.

▶ 답:

▶ 정답: $\frac{99}{4}$

해설

$$x + y = 2, \quad x^2 + y^2 = 3$$

$$(x + y)^2 = x^2 + 2xy + y^2$$

$$2^2 = 3 + 2xy$$

$$\therefore xy = \frac{1}{2}$$

$$\begin{aligned} x^3 + y^3 &= (x + y)^3 - 3xy(x + y) \\ &= 2^3 - 3 \times \frac{1}{2} \times 2 = 5 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \therefore x^6 + y^6 &= (x^3)^2 + (y^3)^2 \\ &= (x^3 + y^3)^2 - 2(xy)^3 \\ &= 5^2 - 2 \times \left(\frac{1}{2}\right)^3 = \frac{99}{4} \end{aligned}$$

26. $(ax^3 - x^2 + 3x - 1)(2x^3 + bx^2 + 4)$ 를 전개하였을 때, x^2 의 계수는 1, x^3 의 계수는 -1 이다. 이때, a, b 의 값을 각각 구하여라.

▶ 답 :

▶ 답 :

▷ 정답 : $a = 4$

▷ 정답 : $b = -5$

해설

주어진 식에서 x^2 항은 $-4x^2 - bx^2 = (-4 - b)x^2$
따라서 $a = 4, b = -5$ 이다.

즉, $-4 - b = 1 \quad \therefore b = -5$

x^3 항은 $4ax^3 + 3bx^3 - 2x^3 = (4a + 3b - 2)x^3$
따라서 $4a + 3b - 2 = -1$ 이므로 $a = 4$ 이다.

27. $a + b = 1$, $ab = -2$ 일 때, $a^{12} + b^{12}$ 의 값을 구하여라.

▶ 답 :

▷ 정답 : 4097

해설

$$a^2 + b^2 = (a + b)^2 - 2ab = 5$$

$$a^4 + b^4 = (a^2 + b^2)^2 - 2a^2b^2 = 25 - 8 = 17$$

$$\begin{aligned}\therefore a^{12} + b^{12} &= (a^4 + b^4)^3 - 3a^4b^4(a^4 + b^4) \\ &= 17^3 - 3(-2)^4 \times 17 \\ &= 4913 - 816 = 4097\end{aligned}$$

28. $(2x + ay)^2 = bx^2 + cxy + 9y^2$ 일 때, $a - b + c$ 의 값을 구하여라. (단, $a > 0$)

▶ 답 :

▷ 정답 : 11

해설

$$(2x + ay)^2 = 4x^2 + 4axy + a^2y^2$$

$$4x^2 + 4axy + a^2y^2 = bx^2 + cxy + 9y^2$$

$$\therefore b = 4$$

$$a^2 = 9$$

$$\therefore a = 3 (\because a > 0)$$

$$4a = c$$

$$\therefore c = 12$$

$$a - b + c = 3 - 4 + 12 = 11$$

29. $a\%$ 의 설탕물 xg 에 yg 의 물을 더 부어 $b\%$ 의 설탕물이 되었다. y 를 a, b, x 에 관한 식으로 나타내어라.

▶ 답 :

▷ 정답 : $y = \frac{ax}{b} - x$

해설

$$\frac{a \times x}{100} = \frac{b \times (x + y)}{100}$$

$$ax = b(x + y)$$

$$x + y = \frac{ax}{b}$$

$$\therefore y = \frac{ax}{b} - x$$

30. $2a - 3b = 1$ 일 때, $4(a - 2b - 1) - 3(a + b) + 5b$ 를 a 에 관한 식으로 나타내어라.

▶ 답 :

▷ 정답 : $-3a - 2$

해설

$$2a - 3b = 1, -3b = 1 - 2a$$

$$\therefore b = \frac{2}{3}a - \frac{1}{3}$$

$$4(a - 2b - 1) - 3(a + b) + 5b$$

$$= a - 11b + 5b - 4$$

$$= a - 6b - 4$$

$$a - 6b - 4 \text{ 에 } b = \frac{2}{3}a - \frac{1}{3} \text{ 을 대입}$$

$$a - 6\left(\frac{2}{3}a - \frac{1}{3}\right) - 4 = a - 4a + 2 - 4$$

$$= -3a - 2$$

31. $4x + 3y = 2$ 일 때, $5(x - 3y) - 2(4x - 3y)$ 를 x 에 관한 식으로 나타내어라.

▶ 답 :

▷ 정답 : $9x - 6$

해설

$$4x + 3y = 2$$

$$\therefore 3y = -4x + 2$$

$$\begin{aligned}(\text{준식}) &= 5(x - 2 + 4x) - 2(4x - 2 + 4x) \\ &= 5(5x - 2) - 2(8x - 2) \\ &= 9x - 6\end{aligned}$$

32. $a : b = 2 : 1$, $c : a = 2 : 3$, $b : d = 4 : 3$ 일 때, $c : d$ 를 가장 간단한 자연수의 비로 나타내어라.

▶ 답 :

▷ 정답 : 16 : 9

해설

$$a : b = 2 : 1 \text{ 에서 } b = \frac{1}{2}a,$$

$$b : d = 4 : 3 \text{ 에서 } d = \frac{3}{4}b = \frac{3}{4} \times \frac{1}{2}a = \frac{3}{8}a,$$

$$c : a = 2 : 3 \text{ 에서 } c = \frac{2}{3}a,$$

$$\text{따라서 } c : d = \frac{2}{3}a : \frac{3}{8}a = 16 : 9$$