

1. 집합 $X = \{x \mid a \leq x \leq b\}$ 에서 실수 전체의 집합 R 로의 함수 f 는 $f(x) = \frac{x^2 + 5}{6}$ 이다. f 의 정의역과 치역이 일치할 때, $a + b$ 의 값은?
(단, $0 < a < b$)

- ① 2 ② 4 ③ 6 ④ 8 ⑤ 10

해설

$f(a) = \frac{a^2 + 5}{6}, f(b) = \frac{b^2 + 5}{6}$ 이고
 $0 < a < b$ 이므로 $f(a) < f(b)$
따라서, 함수 f 의 치역은
 $f(X) = \{y \mid f(a) \leq y \leq f(b)\}$
그런데 정의역과 치역이 일치하므로
즉 $f(X) = X$ 이므로 $f(a) = a, f(b) = b$
 $f(a) = a$ 에서 $\frac{a^2 + 5}{6} = a,$
 $a^2 - 6a + 5 = 0, (a - 1)(a - 5) = 0$
 $\therefore a = 1$ 또는 $a = 5$
 $f(b) = b$ 에서 $\frac{b^2 + 5}{6} = b,$
 $b^2 - 6b + 5 = 0, (b - 1)(b - 5) = 0$
 $\therefore b = 1$ 또는 $b = 5$
그런데 $a < b$ 이므로 $a = 1, b = 5$
 $\therefore a + b = 6$

2. 자연수에서 정의된 함수 f 가 임의의 자연수 n 에 대하여 관계식 $f(n+2) = f(n+1) + f(n)$ 을 만족할 때, 다음 중 $2f(4) + 3f(5)$ 와 함숫값이 같은 것은? (단, $f(1) \neq 0$)

① $2f(6)$ ② $2f(7)$ ③ $f(7)$ ④ $f(8)$ ⑤ $f(9)$

해설

주어진 관계식 $f(n+2) = (n+1) + f(n)$ 을 이용하여 $f(4) + f(5) = f(6)$ 이므로

$$2f(4) + 3f(5) = f(4) + f(5) + f(4) + f(5) + f(5) \\ = f(6) + f(6) + f(5)$$

또 $f(5) + f(6) = f(7), f(6) + f(7) = f(8)$ 이므로

$$2f(4) + 3f(5) = f(6) + f(7) = f(8) \text{ 이다.}$$

3. 실수 전체의 집합을 R , 유리수 전체의 집합을 Q 라 할 때, R 에서 R 로의 함수 f 가 다음과 같이 정의되어 있다.

$$f(x) \begin{cases} \sqrt{2} & (x \in Q \text{일 때}) \\ 1 & (x \notin Q \text{일 때}) \end{cases} \quad \text{함수 } f \text{ 에 대한 다음 <보기>의 설명 중 옳은 것을 모두 고르면?}$$

<보기>

- ㉠ $x \in Q$ 일 때, $(f \circ f)(x) = 1$
- ㉡ $x \in R$ 일 때, $f(x + f(x)) = 1$
- ㉢ $x_1, x_2 \in R$ 이고, $f(x_1) = f(x_2) = 1$ 이면 $f\left(\frac{x_1 + x_2}{2}\right) = 1$

① ㉠ ② ㉡ ③ ㉢ ④ ㉠, ㉡ ⑤ ㉡, ㉢

해설

㉠ $x \in Q$ 이면 $f(x) = \sqrt{2} \notin Q$
 $\therefore (f \circ f)(x) = f(f(x)) = 1$
㉡ i) $x \in Q$ 이면 $x + f(x) = x + \sqrt{2} \notin Q$
 $\therefore f(x + f(x)) = 1$
ii) $x \notin Q$ 이면 $x + f(x) = x + 1 \notin Q$
 $\therefore f(x + f(x)) = 1$
따라서, $x \in R$ 이면 $f(x + f(x)) = 1$
㉢ $f(x_1) = f(x_2) = 1$ 이므로 $x_1 \notin Q, x_2 \notin Q$
그런데 $x_1 = 1 + \sqrt{2}, x_2 = 1 - \sqrt{2}$ 인 경우에는
 $f(x_1) = f(x_2) = 1$ 이지만
 $f\left(\frac{x_1 + x_2}{2}\right) = f(1) = \sqrt{2}$
따라서 $f\left(\frac{x_1 + x_2}{2}\right)$ 가 반드시 1이라고 할 수는 없다.

4. 함수 $y = f(x)$ 의 역함수를 $y = g(x)$ 라고 할 때, 다음 중 함수 $f(3x-2)$ 의 역함수는?

- ① $\frac{1}{3}\{g(x)+2\}$ ② $\frac{1}{3}\{g(x)-2\}$ ③ $3g(x)-2$
④ $3g(x)+2$ ⑤ $\frac{1}{2}\{g(x)-3\}$

해설

$y = f(3x-2)$ 의 역함수를 구하기 위하여 x, y 를 바꾸면

$$x = f(3y-2)$$

$$\therefore 3y-2 = f^{-1}(x) = g(x)$$

$$\therefore y = \frac{1}{3}\{g(x)+2\}$$

5. 함수 $f(x) = \frac{1}{6}x^2 + a(x \geq 0)$ 의 역함수를 $g(x)$ 라고 할 때, 방정식 $f(x) = g(x)$ 의 한 근이 $3 + \sqrt{2}$ 이다. 이 때, 유리수 a 의 값은?

- ① $\frac{1}{2}$ ② 1 ③ $\frac{7}{6}$ ④ $\frac{5}{2}$ ⑤ $\frac{8}{3}$

해설

함수 $f(x) = \frac{1}{6}x^2 + a(x \geq 0)$ 의 역함수 $g(x)$ 에 대하여
방정식 $f(x) = g(x)$ 의 해는 $f(x) = x$ 의 해와 같으므로

$\frac{1}{6}x^2 + a = x$ 의 한 근이 $3 + \sqrt{2}$ 이다.

따라서, $x^2 - 6x + 6a = 0$ 에서 a 가 유리수이므로 두 근은 $3 + \sqrt{2}$
, $3 - \sqrt{2}$ 이다.

근과 계수의 관계에 의하여 $6a = (3 + \sqrt{2})(3 - \sqrt{2}) = 7$

$\therefore a = \frac{7}{6}$

6. 함수 $f(x) = \begin{cases} x^2 & (x \geq 0) \\ x & (x < 0) \end{cases}$ 에 대하여 $g(x) = f(x-2)$ 라할 때, $g^{-1}(9)$ 의 값은? (단, $g^{-1}(x)$ 는 $g(x)$ 의 역함수)

① 2 ② 3 ③ 4 ④ 5 ⑤ 6

해설

$g(x) = f(x-2)$ 이므로

$$g(x) = \begin{cases} (x-2)^2 & (x \geq 2) \\ x-2 & (x < 2) \end{cases}$$

$g^{-1}(9) = k$ 라 하면 $g(k) = 9$

$k \geq 2$ 일 때, $(k-2)^2 = 9$ 에서 $k = 5$

$k < 2$ 일 때, $k-2 = 9$ 를 만족하는 k 가 없다.

$\therefore g^{-1}(9) = 5$

7. 함수 $f(x) = \sqrt{x-2}$ 의 역함수를 $g(x)$ 라 하자. 점 P 는 함수 $y = f(x)$ 의 그래프 위를 움직이고, 점 Q 는 $y = g(x)$ 의 그래프 위를 움직인다. 이 때, 두 점 P, Q 사이의 거리의 최솟값을 구하면?

- ① $\frac{5\sqrt{2}}{4}$ ② $\frac{3\sqrt{2}}{2}$ ③ $\frac{7\sqrt{2}}{4}$ ④ $\frac{9\sqrt{2}}{4}$ ⑤ $\frac{5\sqrt{2}}{2}$

해설

우선, $f(x)$ 의 역함수 $g(x)$ 를 구하자.

$$f(x) = \sqrt{x-2} \text{라 하면 } y^2 = x-2$$

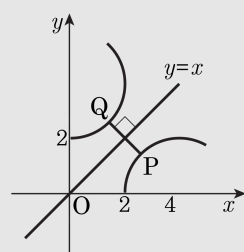
$$\therefore x = y^2 + 2$$

위 식의 x 와 y 를 바꾸면 $y = x^2 + 2$

$$\therefore f^{-1}(x) = g(x) = x^2 + 2$$

한편, 함수 $f(x)$ 와 $g(x)$ 는 역함수 관계이므로

직선 $y = x$ 에 대칭이다.



또, P, Q 사이의 거리가 최소가 되는 것은

선분 PQ 와 직선 $y = x$ 가 수직을 이룰 때이다.

동점 P, Q 사이의 거리의 최솟값은 점 Q 와 직선 $y = x$ 사이의

거리의 최솟값의 2 배이다. 동점 $Q(a, a^2 + 2)$ 라 놓고

직선 $y = x$ 와 점 Q 사이의 거리를 d 라 하면

$$d = \frac{|a - (a^2 + 2)|}{\sqrt{1^2 + (-1)^2}} = \frac{\left| -\left(a - \frac{1}{2}\right)^2 - \frac{7}{4} \right|}{\sqrt{2}} = \frac{\left| \left(a - \frac{1}{2}\right)^2 + \frac{7}{4} \right|}{\sqrt{2}}$$

거리 d 의 최솟값은 $a = \frac{1}{2}$ 일 때

$$\frac{\frac{7}{4}}{\sqrt{2}} = \frac{7\sqrt{2}}{8} \text{ 이므로}$$

두 점 P, Q 사이의 거리의 최솟값은

$$\therefore \frac{7\sqrt{2}}{8} \times 2 = \frac{7\sqrt{2}}{4}$$

8. 양수 a, b, c, d 는 $a : b = c : d$ 가 성립한다. 다음 중에서 옳은 것을 모두 고르면?

① $ad = bc$

② $ab : cd = \frac{b}{a} : \frac{d}{c}$

③ $a : (a + b) = c : (c + d)$

④ $(a + 2) : b = (c + 2) : d$

⑤ $(a + b) : (c + d) = (2a + b) : (2c + d)$

해설

$a : b = c : d$ 에서 $c = ka, d = kb$ 라 놓자.

① $ad = a \cdot kb = kab, bc = b \cdot ka = kab$

$\therefore ad = bc$

② $ab : cd = ab : k^2 ab = 1 : k^2$

$\frac{b}{a} : \frac{d}{c} = \frac{b}{a} : \frac{kb}{ka} = \frac{b}{a} : \frac{b}{a} = 1 : 1$

$\therefore ab : cd \neq \frac{b}{a} : \frac{d}{c}$

③ $a : (a + b) = c : (c + d) = ka : k(a + b) = a : a + b$

$\therefore a : (a + b) = c : (c + d)$

④ $(a + 2) : b = (c + 2) : d = (ka + 2) : kb$

$\therefore (a + 2) : b \neq (c + 2) : d$

⑤ $(a + b) : (c + d)$

$= (a + b) : (ka + kb) = 1 : k, (2a + b) : (2c + d)$

$= (2a + b) : (2ka + kb) = 1 : k$

$\therefore (a + b) : (c + d) = (2a + b) : (2c + d)$

9. 대열의 길이가 5km인 부대가 일정한 속도로 걸어서 이동하고 있다. 이 때 부대의 맨 끝에서 말을 타고 있던 전령이 이 부대의 맨 앞에 있는 장군에게 긴급히 전해줄 편지가 있었다. 이 전령은 말을 타고 일정한 속도로 부대가 이동하는 방향을 따라 신속히 부대의 맨 앞의 장군에게 편지를 전해주고 바로 반대 방향으로 이동해 부대의 맨 끝으로 왔다. 그 동안에 대열 전체는 5km를 이동했다고 할 때, 이 전령이 움직인 거리는? (단, $\sqrt{2} = 1.414$)

- ① 약 10.4km
- ② 약 11.5km
- ③ 약 12.1km
- ④ 약 12.6km
- ⑤ 약 13.2km

해설

부대의 이동 속도를 1, 전령의 이동 속도를 v
전령이 부대 앞까지 이동하는 데 걸리는 시간을 t_1
부대 뒤로 되돌아오는 데 걸리는 시간은 t_2 라 하면

$$\begin{cases} vt_1 = 5 + 1 \cdot t_1 \cdots \textcircled{㉠} \\ vt_2 = 5 - 1 \cdot t_2 \cdots \textcircled{㉡} \\ 1 \cdot t_1 + 1 \cdot t_2 = 5 \end{cases}$$

$\textcircled{㉠} - \textcircled{㉡}$ 에서 $v(t_1 - t_2) = t_1 + t_2 = 5 \cdots \textcircled{㉢}$
 $\textcircled{㉠} + \textcircled{㉡}$ 에서 $v(t_1 + t_2) = 10 + (t_1 - t_2)$
 $\therefore 5v = 10 + (t_1 - t_2) \cdots \textcircled{㉣} (\because \textcircled{㉢}$ 에서)
 $\textcircled{㉢}, \textcircled{㉣}$ 에서 $v(5v - 10) = 5$
 $v^2 - 2v - 1 = 0, v = 1 + \sqrt{2} (\because v > 1)$
(전령이 움직인 거리) $= v(t_1 + t_2)$
 $= 5(1 + \sqrt{2})$
 $= 5 \times 1 + 5 \times 2.414$
 $= 12.07$
따라서 약 12.1km를 전령이 움직였다.

해설

부대의 이동 속도를 a , 전령의 이동 속도를 b 라 하면
부대가 5km이동하는 데 걸리는 시간은 $\frac{5}{a}$
전령이 부대의 맨 앞까지 이동하는 데 걸리는 시간은 $\frac{5}{b-a}$
전령이 부대의 맨 뒤로 되돌아오는 데 걸리는 시간은 $\frac{5}{b+a}$ 이다.

$$\frac{5}{b-a} + \frac{5}{b+a} = \frac{5}{a}$$

$b = (1 + \sqrt{2})a$
 $\therefore (\text{전령이 움직인 거리}) = (1 + \sqrt{2})a \cdot \frac{5}{a} \approx 5 \times 2.414 = 12.07$
따라서 약 12.1km를 전령이 움직였다.

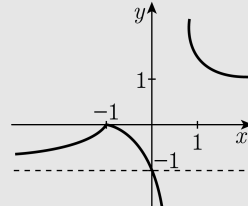
10. 유리함수 $y = \frac{|x+1|}{x-1}$ 의 그래프와 $y = a$ 의 그래프의 교점이 2개가 되게 하는 a 값의 범위를 구하면?

- ① $a < 1$ ② $a > 1$ ③ $0 < a < 1$
④ $-1 < a < 0$ ⑤ $-1 < a < 1$

해설

$y = \frac{|x+1|}{x-1}$ 의 그래프를
그려보면

$\therefore y = a$ 와 교점이 두 개가 되려면 $-1 < a < 0$



11. $\frac{\sqrt{y}}{\sqrt{x}} = -\sqrt{\frac{y}{x}}$ 가 성립할 때, $\sqrt{(y-x+1)^2} + 3\sqrt{x^3-y^3-3xy(x-y)}+|x|$ 를 간단히 하면?

- ① $x+1$ ② $-x+1$ ③ $-x-1$
 ④ $x-1$ ⑤ 1

해설

$$\frac{\sqrt{y}}{\sqrt{x}} = -\sqrt{\frac{y}{x}} \text{ 일 때, } y \geq 0, x < 0$$

$$\begin{aligned} (\text{준식}) &= |y-x+1| + 3\sqrt{(x-y)^3} + |x| \\ &= y-x+1+x-y-x = -x+1 \end{aligned}$$

12. 자연수 n 에 대하여 $\sqrt{10+\sqrt{n}} + \sqrt{10-\sqrt{n}}$ 이 자연수 k 가 될 때, $n+k$ 의 값을 구하면?

① 12 ② 22 ③ 32 ④ 42 ⑤ 52

해설

$$\sqrt{10+\sqrt{n}} + \sqrt{10-\sqrt{n}} = k \quad (n, k \text{는 자연수})$$

양변을 제곱하면

$$10 + \sqrt{n} + 2\sqrt{100-n} + 10 - \sqrt{n} = k^2$$

$$\therefore k^2 - 20 = 2\sqrt{100-n} \cdots (\text{i})$$

이때, $0 \leq k^2 - 20 < 20$ ($\because 0 \leq \sqrt{100-n} < 10$) 이고, $k^2 - 20$ 은 짝수이므로 k^2 도 짝수이다.

$20 \leq k^2 < 40$ 을 만족하는 짝수의 제곱수는

$$36 \text{이므로 } k^2 = 36$$

$$\therefore k = 6$$

$$(\text{i}) \text{에서 } n = 36$$

$$\therefore n + k = 42$$

13. $x = 2\sqrt{a-1} (a > 1)$ 일 때,

$$P = \frac{\sqrt{a+x} + \sqrt{a-x}}{\sqrt{a+x} - \sqrt{a-x}} \text{로 놓는다.}$$

$$P = x - \frac{1}{x} \text{일 때, } x \text{의 값은?}$$

- ① $\sqrt{2}$ ② $\sqrt{3}$ ③ $\frac{1}{\sqrt{2}}$ ④ $\frac{1}{\sqrt{3}}$ ⑤ $-\frac{2}{\sqrt{3}}$

해설

$$x = 2\sqrt{a-1} \text{에서 } \sqrt{a-1} = \frac{x}{2}, a-1 = \frac{x^2}{4}$$

$$\therefore a = \frac{x^2}{4} + 1$$

$$x > 0 \text{이므로 } \sqrt{a+x} = \sqrt{\frac{(x+2)^2}{4}} = \frac{x+2}{2}$$

$$\sqrt{a-x} = \sqrt{\frac{(x-2)^2}{4}} = \frac{|x-2|}{2}$$

$$\therefore P = \frac{x+2+|x-2|}{x+2-|x-2|} = \begin{cases} \frac{2}{2} & (0 < x < 2) \\ \frac{x}{2} & (x \geq 2) \end{cases}$$

$$\text{i) } 0 < x < 2 \text{일 때 } \frac{2}{x} = x - \frac{1}{x}$$

$$\therefore \frac{3}{x} = x$$

$$\therefore x = \sqrt{3} \text{(적합)}$$

$$\text{ii) } x \geq 2 \text{일 때 } \frac{x}{2} = x - \frac{1}{x}$$

$$\therefore \frac{1}{x} = \frac{x}{2}$$

$$\therefore x = \sqrt{2} \text{(부적합)}$$

$$\text{i), ii)에서 } x = \sqrt{3}$$

14. $f(x) = \sqrt{x-1} + 1$ 과 그 역함수를 $g(x)$ 라 할 때 $g(x)$ 와 $f(x), g(x)$ 의 교점 사이의 거리를 각각 옳게 구한 것은?

① $g(x) = x^2 - 2x + 2, \sqrt{3}$

② $g(x) = x^2 - 2x + 2, \sqrt{2}$

③ $g(x) = x^2 - 2x + 1, \sqrt{2}$

④ $g(x) = x^2 - 2x + 1, \sqrt{3}$

⑤ $g(x) = x^2 - 2x + 1, \sqrt{5}$

해설

$f(x) = \sqrt{x-1} + 1$ 에 대하여

i) $y = \sqrt{x-1} + 1$ 로 놓고 역함수를 구하면

$$y-1 = \sqrt{x-1} \dots\dots \textcircled{1}$$

①을 제곱하면

$$(y-1)^2 = x-1, y^2 - 2y + 1 = x-1, x = y^2 - 2y + 2$$

$$\therefore g(x) = x^2 - 2x + 2$$

ii) $f(x)$ 와 역함수 $g(x)$ 의 교점은

$f(x)$ 와 $y=x$ 또는 $g(x)$ 와 $y=x$ 의 교점을

구하면 된다.

$$g(x) = x \text{에서 } x^2 - 2x + 2 = x$$

$$x^2 - 3x + 2 = 0, (x-2)(x-1) = 0$$

그러므로 $x=2$ or $x=1$ 에서 $y=2$ or $y=1$

따라서 두 점 $(1, 1), (2, 2)$ 사이의 거리는

$$\sqrt{(2-1)^2 + (2-1)^2} = \sqrt{2}$$

15. 곡선 $y^2 - 2y + 4x - 3 = 0$ 에 x 축 위의 점 $(a, 0)$ 으로 부터 그은 두 접선이 직교하도록 a 의 값을 정하면?

- ① -1 ② 0 ③ 1 ④ 2 ⑤ 3

해설

곡선 $y^2 - 2y + 4x - 3 = 0$ 에 접하는 직선의 기울기를 m 이라 하면,
그 접선은 점 $(a, 0)$ 을 지나므로 $y = m(x - a)$
이것을 주어진 식에 대입하여 정리하면,
 $(mx - am)^2 - 2(mx - am) + 4x - 3 = 0$
 $m^2x^2 - 2(am^2 + m - 2)x + a^2m^2 + 2am - 3 = 0$
 $\frac{D}{4} = (am^2 + m - 2)^2 - m^2(a^2m^2 + 2am - 3) = 0$
정리하면, $(1 - a)m^2 - m + 1 = 0$
 m 의 두 근을 α, β 라 하면,
두 접선이 직교하기 위해서는 $\alpha\beta = -1$ 이어야 하므로
 $\alpha\beta = \frac{1}{1 - a} = -1$
 $\therefore a = 2$