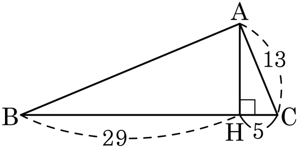
1. 다음 그림과 같은 삼각형 ABC 에서
$\triangle ABC$ 는 어떤 삼각형인지 써라.



▶ 답 :

▷ 정답 : 둔각삼각형

해설

$\triangle AHC$ 에서 $\overline{AH} = \sqrt{13^2 - 5^2} = 12$
$\triangle ABH$ 에서 $\overline{AB} = \sqrt{12^2 + 29^2} = \sqrt{985}$
$\triangle ABC$ 의 세 변 $\sqrt{985}, 13, 34$ 중 가장 긴 변이 34 이다.
$34^2 > (\sqrt{985})^2 + 13^2$
$1156 > 985 + 169$ 이므로 가장 긴 변을 $\overline{BC}$ 로 하는 둔각삼각형 이다.

2. 세 변의 길이가 7, x, 12 인 삼각형이 둔각삼각형이 되기 위한 정수 x 의 값의 합을 구하여라.

▶ 답 :

▷ 정답 : 110

해설

i) $x > 12$ 인 경우

$7 + 12 > x,\ x < 19$

$x^2 > 7^2 + 12^2 = 193,\ x > \sqrt{193}$

$\therefore\ \sqrt{193} < x < 19$

$13 < \sqrt{193} < 14$ 이므로

$\therefore x = 14, 15, 16, 17, 18$

ii) $x < 12$ 인 경우

$7 + x > 12,\ x > 5$

$12^2 > x^2 + 7^2,\ x^2 < 95,\ x < \sqrt{95}, x \leq 9$

$\therefore 5 < x \leq 9$

$\therefore x = 6, 7, 8, 9$

$\therefore 6 + 7 + 8 + 9 + 14 + 15 + 16 + 17 + 18 = 110$

3. 세 변의 길이가 각각 9, 12, a 인 삼각형이 둔각삼각형이 되기 위한 자연수 a 는 모두 몇 개인가? (단, $a > 12$)

① 1개 ② 2개 ③ 3개 ④ 4개 ⑤ 5개

해설

i) 삼각형이 될 조건 : $12 - 9 < a < 9 + 12$

그런데 $a > 12$

$\therefore\ 12 < a < 21$

ii) 둔각삼각형일 조건 : $a^2 > 12^2 + 9^2$

$\therefore\ a > 15$

i), ii) 에 의해서 $15 < a < 21$

4. $a > b$ 이고, $x = a + b$, $y = a - b$, $z = 2\sqrt{ab}$ 일 때, x, y, z 를 세 변의 길이로 하는 삼각형은 어떤 삼각형인가?

▶ 답 :

▷ 정답 : x 가 빗변인 직각삼각형

해설

$x^2 = (a + b)^2 = a^2 + 2ab + b^2$

$y^2 + z^2 = (a - b)^2 + 4ab = a^2 + 2ab + b^2$

$\therefore\ x^2 = y^2 + z^2$ 이므로 x 가 빗변인 직각삼각형이다.

5. 길이가 3, 4, 5, 6, 7 인 다섯 개의 선분 중, 3 개를 선택하여 삼각형을 만들 때, 만들어진 삼각형이 둔각삼각형일 확률을 구하여라.

▶ 답 :

▷ 정답 : $\frac{5}{9}$

해설

다섯 개의 선분 중 세 개를 선택하는 경우의 수는 (3, 4, 5), (3, 4, 6), (3, 5, 6), (3, 5, 7), (3, 6, 7), (4, 5, 6), (4, 5, 7), (4, 6, 7), (5, 6, 7) 의 9가지이다.
이 중 둔각삼각형이 되는 경우는 가장 긴 변의 길이의 제곱이 나머지 두 변의 제곱의 합보다 커야 하므로 (3, 4, 6), (3, 5, 6), (3, 5, 7), (3, 6, 7), (4, 5, 7) 의 5 가지이다.

따라서 구하는 확률은 $\frac{5}{9}$ 이다.

6. 세 변의 길이가 각각 $a+4, a, a-4$ 로 나타내어지는 삼각형이 직각삼각형이 되기 위한 상수 a 의 값을 구하여라.

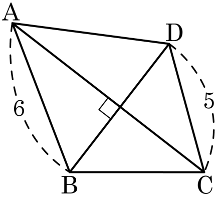
▶ 답 :

▷ 정답 : 16

해설

변의 길이이므로 $a-4>0, a>4 \cdots$ ㉠
삼각형이 될 조건에 의해
$a+4<a+(a-4), 8<a \cdots$ ㉡
㉠, ㉡에 의하여 $a>8$
세 변 중 가장 긴 변이 $a+4$ 이므로
$(a+4)^2=a^2+(a-4)^2$
$a^2-16a=0$
$a(a-16)=0$
$\therefore a=16\ (\because\ a>8)$

7. 다음 그림의 □ABCD 에서 $\overline{AD}^2 + \overline{BC}^2$ 의 값은?



① 11　② 30　③ 41

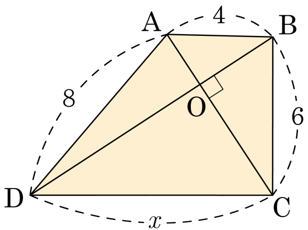
④ 56　⑤ 61

해설

대각선이 직교하는 사각형에서 두 쌍의 대변의 제곱의 합이 서로 같다.

$\therefore\ \overline{AD}^2 + \overline{BC}^2 = 5^2 + 6^2 = 61$

8. 사각형 ABCD 에서 $\overline{AC} \perp \overline{BD}$ 이고 $\overline{AB} = 4$, $\overline{BC} = 6$, $\overline{AD} = 8$ 일 때, x의 값을 구하여라.



▶ 답 :

▷ 정답 : $2\sqrt{21}$

해설

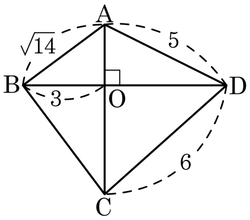
$\overline{AB}^2 + \overline{CD}^2 = \overline{AO}^2 + \overline{BO}^2 + \overline{CO}^2 + \overline{DO}^2 = \overline{BO}^2 + \overline{CO}^2 + \overline{AO}^2 + \overline{DO}^2 = \overline{BC}^2 + \overline{AD}^2$

$4^2 + x^2 = 6^2 + 8^2$

$x^2 = 36 + 64 - 16 = 84$

$\therefore x = 2\sqrt{21} (\because x > 0)$

9. 다음 그림과 같은 사각형 ABCD 에서 $\overline{AC} \perp \overline{BD}$ 일 때, $\overline{OC}$ 의 길이를 구하여라.



① 5
② 4
③ $2\sqrt{5}$
④ $1 + \sqrt{14}$
⑤ $3\sqrt{13}$

해설

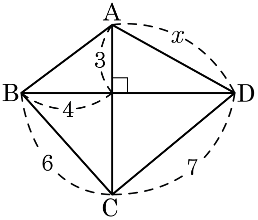
$(\sqrt{14})^2 + 6^2 = 5^2 + \overline{BC}^2$

$\overline{BC}^2 = 25,\ \overline{BC} = 5$ 이므로

$\triangle OBC$ 에서 $\overline{BC}^2 = 3^2 + \overline{OC}^2,\ 5^2 = 3^2 + \overline{OC}$

$\therefore \overline{OC} = 4$

10. 다음 그림에서 두 대각선이 서로 직교할 때, $\overline{AD}$의 길이를 구하면?



① $\sqrt{23}$ ② $3\sqrt{3}$ ③ $\sqrt{31}$

④ $\sqrt{38}$ ⑤ $3\sqrt{5}$

해설

피타고라스 정리에 의해

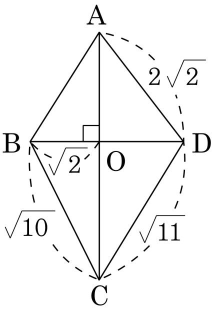
$\overline{AB} = 5$

$5^2 + 7^2 = x^2 + 6^2$

$25 + 49 = x^2 + 36$

$\therefore x = \sqrt{38}$

11. 다음 그림의 □ABCD 에서 $\overline{AO}$ 의 길이를 구하여라.
(단, $\overline{AC}\perp\overline{BD}$)



▶ 답 :

▷ 정답 : $\sqrt{5}$

해설

$$\overline{AB}^2+\overline{CD}^2=\overline{BC}^2+\overline{AD}^2$$
$$\overline{AB}^2+11=10+8$$
$$\overline{AB}^2=7\overline{AB}^2=\overline{BO}^2+\overline{AO}^2$$
$$7=2+\overline{AO}^2,\ \overline{AO}^2=5$$
$$\therefore\ \overline{AO}=\sqrt{5}(\because\ \overline{AO}>0)$$