1. 연속하는 세 자연수의 합이 15 초과 33 미만이고, 작은 수의 5 배는 가장 큰 수보다 31 이상 클 때, 세 수 중 가장 큰 수를 구하여라.

▶ 답 :

▷ 정답 : 11

해설

연속하는 세 자연수를 $x-1,\ x,\ x+1$ 이라고 하면
세 수의 합은 $3x$
$15 < 3x < 33,\quad 5 < x < 11$
작은 수의 5 배는 가장 큰 수보다 15 이상 크므로

$$5(x-1) \geq (x+1)+31,\quad x \geq \frac{37}{4}$$

$\frac{37}{4} \leq x < 11$ 을 자연수는 10 이므로 세 수 중 가장 큰 수는 11 이다.

2. 어느 연속하는 세 짝수의 합이 126 보다 크고 134 보다 작다고 할 때, 중간에 있는 수는 무엇인가?

① 38 ② 40 ③ 42 ④ 44 ⑤ 46

해설

연속하는 세 짝수 이므로 중간에 있는 수를 x 라고 잡으면 연속하는 세 수는 $x-2$, x , $x+2$ 라고 표현되고, 세 수의 합은 $3x$ 이다.

문제의 조건을 따르면, $\begin{cases} 3x > 126 \\ 3x < 134 \end{cases}$, 또는 $126 < 3x < 134$ 로 표현할 수 있다.

따라서 $\frac{126}{3} < x < \frac{134}{3}$ 이다.

이는 $42 < x < 44.666\cdots$ 이다.

x 는 짝수이므로 44 이다.

3. 어떤 수를 3 배 하고 8 을 빼면 32 보다 작고, 어떤 수에서 5 를 빼고 6 배 하면 24 보다 크다고 한다. 어떤 수의 범위로 옳은 것은?

① $8 < x < \frac{37}{3}$ ② $8 < x < \frac{40}{3}$ ③ $9 < x < \frac{37}{3}$
④ $9 < x < \frac{40}{3}$ ⑤ $9 < x < \frac{43}{3}$

해설

어떤 수를 x 라고 하고 문제의 조건을 이용하여 두 개의 식을 만든다. '어떤 수를 3 배 하고 8 을 빼면 32 보다 작고.' 를 식으로 표현하면, $3x - 8 < 32$ 이고, '어떤 수에서 5 를 빼고 6 배 하면 24 보다 크다' 를 식으로 표현하면, $6(x-5) > 24$ 이다.

두 개의 부등식을 연립부등식으로 표현하면, $\begin{cases} 3x - 8 < 32 \\ 6(x-5) > 24 \end{cases}$

이다. 이를 간단히 하면, $\begin{cases} x < \frac{40}{3} \\ x > 9 \end{cases}$ 따라서 $9 < x < \frac{40}{3}$ 이다.

4. 다음 이차부등식 중 해가 존재하지 않는 것은?

① $2x^2 - 6x + 1 \le 0$　　② $x^2 - 2x - 3 < 0$

③ $x^2 - x + 1 > 0$　　④ $x^2 - 6x + 9 > 0$

⑤ $4x^2 - 4x + 1 < 0$

해설

① $(x - \frac{3-\sqrt{7}}{2})(x - \frac{3+\sqrt{7}}{2}) \le 0$

$\Rightarrow \frac{3-\sqrt{7}}{2} \le x \le \frac{3+\sqrt{7}}{2}$

② $(x+1)(x-3) < 0 \Rightarrow -1 < x < 3$

③ $(x - \frac{1}{2})^2 + \frac{3}{4} > 0 \Rightarrow x$ 는 모든 실수

④ $(x-3)^2 > 0 \Rightarrow x \ne 3$ 인 모든 실수

⑤ $(2x-1)^2 < 0 \Rightarrow$ 해는 없다

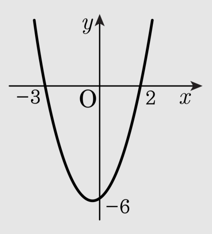
5. 이차함수의 그래프를 이용하여 이차부등식 $x^2 + x - 6 > 0$을 풀면?

① $x < -3$ 또는 $x > 2$　　② $x < -2$ 또는 $x > 3$

③ $x < -1$ 또는 $x > 4$　　④ $x < 0$ 또는 $x > 5$

⑤ $x < 1$ 또는 $x > 6$

해설



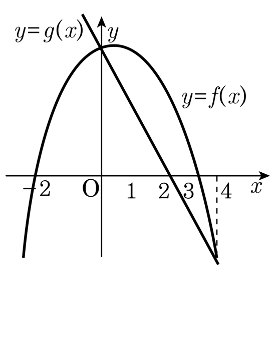
이차방정식 $x^2 + x - 6 = 0$ 에서 $(x+3)(x-2) = 0$

$\therefore x = -3$ 또는 $x = 2$

$f(x) = x^2 + x - 6$ 으로 놓으면 $y = f(x)$ 의 그래프는 오른쪽 그림과 같고

이차부등식 $f(x) > 0$의 해는 $x < -3$ 또는 $x > 2$

6. 이차함수 $y = f(x)$ 의 그래프와 직선 $y = g(x)$ 가 다음 그림과 같을 때, 부등식 $f(x) > g(x)$ 의 해를 구하면?



① $-2 < x < 4$　② $-2 < x < 3$　③ $0 < x < 4$　④ $2 < x < 3$　⑤ $3 < x < 4$

해설

부등식 $f(x) > g(x)$ 의 해는
함수 $f(x)$ 의 그래프가 직선 $y = g(x)$ 보다
위쪽에 있는 x 의 구간을 의미하므로
구하는 해는 $0 < x < 4$

7. 부등식 $(a-b)x+(b-2a)>0$의 해가 $x>\frac{3}{2}$일 때, 부등식 $ax^2+(a+2b)x+(a+3b)<0$의 해를 구하면?

① $3<x<7$ ② $-3<x<1$ ③ $x<2,\ x>3$

④ $-1<x<2$ ⑤ $x<-2,\ x>4$

해설

$(a-b)x>2a-b$의 해가 $x>\frac{3}{2}$이려면

$a-b>0,\ \frac{2a-b}{a-b}=\frac{3}{2}$이어야 한다.

$\therefore\ a=-b,\ \ b<0$

준 부등식 $-bx^2+bx+2b<0$에서

$x^2-x-2<0,\ (x-2)(x+1)<0$

$\therefore\ -1<x<2$

8. x에 관한 이차부등식 $ax^2-2ax-3a \ge bx^2-2bx-3b$에 대하여 다음 중 옳은 것은?

① $a<b$일 때, $-1 \le x \le 3$이다.

② $a<b$일 때, $x \le -1,\ x \le 3$이다.

③ $a<0$일 때, $-1 \le x \le 3$이다.

④ $b<0$일 때, $x \le -1,\ x \ge 3$이다.

⑤ $a \ge b$ 일 때, 부등식은 모든 실수 x에 대하여 성립한다.

해설

$ax^2-2ax-3a \ge bx^2-2bx-3b$을 이항하여 정리하면
$(a-b)x^2-2(a-b)x-3(a-b) \ge 0$(이차부등식이므로 $a \ne b$)
ⅰ) $a<b$이면 $x^2-2x-3=(x-3)(x+1) \le 0$
$\therefore -1 \le x \le 3$
ⅱ) $a>b$이면
$x^2-2x-3=(x-3)(x+1) \ge 0$
$\therefore x \le -1,\ x \ge 3$

9. 이차방정식 $x^2-4x+k=0$의 두 실근이 모두 3보다 작기 위한 실수 k의 범위를 구하면 $m<k\le n$이다. mn의 값을 구하면?

① 10　② 12　③ -15　④ -12　⑤ -10

해설

ⅰ) $D/4=4-k\ge 0,\ k\le 4$
ⅱ) $f(3)>0,\ k>3$ 따라서,
ⅰ) ⅱ)를 모두 만족하는 k의 범위는 $3<k\le 4$
$m=3,\ n=4$ 이므로 $mn=12$

10. x에 관한 이차방정식 $x^2 - ax + 9 = 0$이 $x < 1$에서 두 개의 실근을 갖도록 하는 실수 a의 범위를 구하면 $a \leq k$이다. 이 때, k의 값을 구하여라.

▶ 답 :

▷ 정답 : $k = -6$

해설

$f(x) = x^2 - ax + 9$라 놓으면

i) 축이 $x < 1$에 있어야 하므로 $\frac{1}{2}a < 1,\ a < 2$

ii) $f(1) > 0, \quad 1 - a + 9 > 0, \quad a < 10$

iii) 두 개의 실근을 가져야 하므로

$D = a^2 - 4 \cdot 9 \geq 0,\ \ a \geq 6,\ a \leq -6$

따라서 i), ii), iii)에 의해 $a \leq -6$

$\therefore k = -6$

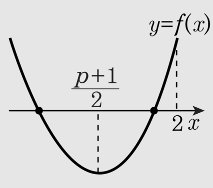
11. x에 대한 이차방정식 $x^2-(p+1)x+2-p=0$의 서로 다른 두 근이 모두 2보다 작을 때, 양수 p의 값의 범위는?

① $0<p<1$　　② $\frac{1}{2}<p<1$　　③ $1\le p<2$

④ $1<p<\frac{4}{3}$　　⑤ $p>1$

해설

$f(x)=x^2-(p+1)x+2-p$ 라 하면 $y=f(x)$ 의 그래프는 다음 그림과 같아야 한다.



(i) 이차방정식 $f(x)=0$ 의 판별식을 D라 하면

$\mathrm{D}=(\mathrm{p}+1)^2-4(2-\mathrm{p})>0$

$p^2+6p-7>0,\ (p+7)(p-1)>0$

$\therefore p<-7$ 또는 $p>1$

(ii) $f(2)>0$ 에서 $2^2-(p+1)\cdot 2+2-p>0$

$3p<4$

$\therefore p<\frac{4}{3}$

(iii) $y=f(x)$ 의 그래프의 축의 방정식이 $x=\frac{p+1}{2}$ 이므로

$\frac{p+1}{2}<2$

$\therefore p<3$

(i), (ii), (iii) 에서 $p<-7$ 또는 $1<p<\frac{4}{3}$

그런데 $p>0$이므로 $1<p<\frac{4}{3}$

12. 이차부등식 $x^2-3x+2<0$을 만족하는 모든 x 가 이차부등식 $x^2-2ax+a-1<0$을 만족할 때, 상수 a의 값의 범위는?

① $a>0$　② $a>1$　③ $0<a<1$
④ $0\le a\le 1$　⑤ $a\ge 1$

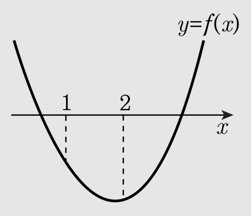
해설

$x^2-3x+2<0$에서 $(x-1)(x-2)<0$

$\therefore 1<x<2$

이차부등식 $x^2-2ax+a-1<0$ 이 $1<x<2$에서 항상 성립해야하므로

$f(x)=x^2-2ax+a-1$로 놓으면 다음 그림과 같이 $f(1)\le 0$, $f(2)\le 0$이어야 한다.



$f(1)=1-2a+a-1\le 0$ 에서 $a\ge 0$ …… ㉠

$f(2)=4-4a+a-1\le 0$ 에서 $a\ge 1$ …… ㉡

㉠, ㉡에서 $a\ge 1$

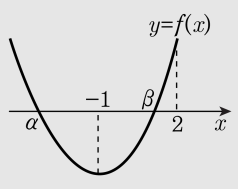
13. 이차방정식 $x^2+2ax+a^2-1=0$의 두 근 α, β에 대하여 $\alpha < -1 < \beta < 2$가 성립할 때, 상수 a의 값의 범위는?

① $-2 < a < 0$　　② $-2 < a < 1$　　③ $0 < a < 2$

④ $1 < a < 2$　　⑤ $1 < a < 3$

해설

$f(x) = x^2 + 2ax + a^2 - 1$ 로 놓으면 이차함수 $y = f(x)$ 의 그래프가 다음 그림과 같이 되어야 한다.



즉, $f(-1) < 0$, $f(2) > 0$

(i) $f(-1) = 1-2a+a^2-1 < 0$ 에서 $a^2-2a < 0$, $a(a-2) < 0$

$\therefore 0 < a < 2$

(ii) $f(2) = 4 + 4a + a^2 - 1 > 0$ 에서 $a^2 + 4a + 3 > 0$, $(a+3)(a+1) > 0$

$\therefore a < -3$, $a > -1$

(i), (ii) 에서 $0 < a < 2$

14. 이차방정식 $x^2-(a+1)x-3=0$의 한 근이 3보다 크고, 다른 한 근은 3보다 작을 때, 실수 a의 값의 범위는?

① $a>-3$ ② $a>-1$ ③ $a>1$
④ $a<1$ ⑤ $a<3$

해설

$f(x)=x^2-(a+1)x-3$이라 하면
방정식 $f(x)=0$의 두근 사이에 3이 있으므로
$f(3)=9-3(a+1)-3<0$
$-3a+3<0$
$\therefore\ a>1$

15. 이차부등식 $ax^2+bx+c>0$ 의 해가 $\frac{1}{14}<x<\frac{1}{10}$ 일 때, 이차부등식 $4cx^2-2bx+a<0$ 의 해는?

① $x<-7$ 또는 $x>-5$ ② $-7<x<-5$
③ $-7<x<5$ ④ $5<x<7$
⑤ $x<5$ 또는 $x>7$

해설

$ax^2+bx+c>0$ 의 해가 $\frac{1}{14}<x<\frac{1}{10}$ 이므로
$(14x-1)(10x-1)<0,\ 140x^2-24x+1<0$
$-140x^2+24x-1>0 \Leftrightarrow ax^2+bx+c>0$
$\therefore a=-140, b=24, c=-1 \cdots$ (가)
(가)를 $4cx^2-2bx+a<0$ 에 대입하면
$-4x^2-48x-140<0$
$x^2+12x+35>0,\ (x+7)(x+5)>0$
$\therefore x<-7$ 또는 $x>-5$

16. 부등식 $ax^2+bx+c>0$ 의 해가 $-\frac{1}{3}<x<1$ 일 때, $cx^2+bx+a<0$ 의 해를 구하면?

① $-\frac{1}{2}<x<1$　② $-3<x<2$　③ $-3<x<\frac{1}{2}$
④ $-2<x<1$　⑤ $-3<x<1$

해설

㉠ $ax^2+bx+c>0$ 의 해가 $-\frac{1}{3}<x<1$ 이면

$x^2+\frac{b}{a}x+\frac{c}{a}<0\ (a<0)$

$\Leftrightarrow (x+\frac{1}{3})(x-1)<0$

$\Leftrightarrow x^2-\frac{2}{3}x-\frac{1}{3}<0$

$\therefore \frac{b}{a}=-\frac{2}{3},\ \frac{c}{a}=-\frac{1}{3}$

㉡ $cx^2+bx+a<0$ 에서 양변을 a로 나누면

$\frac{c}{a}x^2+\frac{b}{a}x+1>0,\ -\frac{1}{3}x^2-\frac{2}{3}x+1>0$

$x^2+2x-3<0,\ (x+3)(x-1)<0$

$\therefore -3<x<1$

17. 부등식 $ax^2+bx+c>0$ 의 해가 $-1-\sqrt{5}<x<-1+\sqrt{5}$ 일 때 부등식 $cx^2-2bx-a<0$ 의 해는?

① $1<x<2$　② $2<x<4$　③ $3<x<5$
④ 모든 실수　⑤ 해는 없다

해설

$ax^2+bx+c>0$ 의 해가
$-1-\sqrt{5}<x<-1+\sqrt{5}$ 이므로 $a<0$
해가 $-1-\sqrt{5}<x<-1+\sqrt{5}$ 이고 이차항의 계수가 1인 부등식은
$\left\{x-(-1-\sqrt{5})\right\}\left\{x-(-1+\sqrt{5})\right\}<0$
$x^2+2x-4<0$
양변에 a 를 곱하면 $ax^2+2ax-4a>0$
$\therefore b=2a, c=-4a\cdots$(가)
(가)를 $cx^2-2bx-a<0$ 에 대입하면
$-4ax^2-4ax-a<0$
$4x^2+4x+1<0, (2x+1)^2<0$
$\therefore$ 해는 없다.

18. 두 부등식 $-x^2-3x+4\le 0$,
$x^2+ax+b<0$에 대하여
두 부등식 중 적어도 하나를 만족하는 x의 값은 실수 전체이고, 두 부등식을 동시에 만족하는 x의 값은 $1\le x<3$일 때, 실수 a, b의 합 $a+b$를 구하면?

① -12　② -11　③ -10　④ 11　⑤ 12

해설

$-x^2-3x+4\le 0$,　$x^2+3x-4\ge 0$
$\Rightarrow x\le -4$ 또는 $x\ge 1$
$\therefore\ a=1,\ b=-12 \ \Rightarrow\ a+b=-11$

19. 두 부등식 $|x-1|<2$, $x^2-2ax+a^2-4 \geq 0$을 동시에 만족하는 x의 값의 범위가 $-1<x \leq 2$가 되도록 상수 a의 값을 정하면?

① 0　　② -2　　③ 4　　④ -6　　⑤ 8

해설

$|x-1|<2$의 해는 $-1<x<3$이므로
공통범위가 $-1<x \leq 2$가 되려면 $x=2$가
$x^2-2ax+a^2-4=0$의 근이어야 한다.
$\therefore 4-4a+a^2-4=0$
$\therefore a=0,\ 4$
그런데 $a=0$이면,
공통범위는 $2 \leq x<3$이 되어 모순이다.
$\therefore a=4$

20. 연립부등식 $\begin{cases} x^2 - 5x + 4 \le 0 \\ x^2 - (k+3)x + 3k > 0 \end{cases}$ 의 해가 $3 < x \le 4$ 가 되도록 하는 k 의 값의 범위를 구하면?

① $-1 < k < 1$　② $-1 < k < 3$　③ $k \ge -1$

④ $k \le 1$　⑤ $-1 \le k \le 3$

해설

$x^2 - 5x + 4 \le 0$ 에서 $(x-1)(x-4) \le 0$, $1 \le x \le 4$

$x^2 - (k+3)x + 3k > 0$ 에서 $(x-k)(x-3) > 0$

ⅰ) $x < k$ 또는 $x > 3$

ⅱ) $x < 3$ 또는 $x > k$

해가 $3 < x < 4$ 가 되려면 ⅰ) 의 경우이어야 하고 $k \le 1$ 이어야 한다

21. 이차방정식 $x^2 - ax + 1 = 0$의 두 근이 -1과 2 사이에 있도록 상수 a의 값의 범위를 구하면?

① $a > 2$ 또는 $a < -2$
② $2 < a < \frac{5}{2}$
③ $-2 < a < 4$
④ $-2 < a < \frac{5}{2}$
⑤ $a > \frac{5}{2}$ 또는 $a < -2$

해설

(i) 방정식이 두 근을 가지므로
$D > 0$에서 $D = a^2 - 4 > 0$, $(a-2)(a+2) > 0$
$\therefore\ a > 2$ 또는 $a < -2$
(ii) $f(-1) > 0$에서 $1 + a + 1 > 0$
$\therefore\ a > -2$
(iii) $f(2) > 0$ 에서 $4 - 2a + 1 > 0$
$\therefore\ \frac{5}{2} > a$
(iv) 대칭축이 -1과 2 사이에 있어야 하므로
$-1 < \frac{a}{2} < 2$
$\therefore\ -2 < a < 4$
따라서 (i), (ii), (iii), (iv)에서 $2 < a < \frac{5}{2}$

22. 이차방정식 $x^2-(p+1)x+2p-1=0$의 두 근이 모두 -2와 2사이에 있도록 실수 p의 값의 범위를 구하면?

① $p>5,\ p<1$　② $-\frac{5}{4}<p<1$　③ $-5<p<3$

④ $p>1,\ p<-1$　⑤ $p>5,\ p<-1$

해설

$f(x)=x^2-(p+1)x+2p-1$로 놓으면

(i) 이차방정식이 두 근을 가지므로 $D>0$에서

$(p+1)^2-4(2p-1)>0,\ \ p^2+2p+1-8p+4>0$

$p^2-6p+5>0,\ \ (p-5)(p-1)>0$

$\therefore\ p>5,\ p<1$

(ii) $f(-2)>0$에서

$4+2(p+1)+2p-1>0$

$4p+5>0,\ 4p>-5\quad \therefore\ p>-\frac{5}{4}$

(iii) $f(2)>0$에서

$4-2p-2+2p-1>0\ \therefore$ 성립

(iv) 대칭축이 -2 와 2 사이에 있어야 하므로

$-2<\frac{p+1}{2}<2\qquad -4<p+1<4$

$\therefore\ -5<p<3$

따라서 (i), (ii), (iii), (iv)에서

$\therefore\ -\frac{5}{4}<p<1$

23. 이차방정식 $x^2 + ax + 2a - 3 = 0$ 의 두 근이 $-2,\ 1$ 사이에 있을 때, 실수 a 의 값의 범위는?

① $\frac{2}{3} < a \le 2$　② $-2 < a < 4$　③ $-4 \le a \le 2$
④ $\frac{2}{3} < a \le 4$　⑤ $a \ge 6$

해설

$f(x) = x^2 + ax + 2a - 3$으로 놓으면
이차방정식 $f(x) = 0$의 두 근이 -2와 1 사이에 있으므로
(i) $D = a^2 - 4(2a-3) \ge 0$에서
$a^2 - 8a + 12 \ge 0$, $(a-2)(a-6) \ge 0$
$\therefore\ a \le 2$ 또는 $a \ge 6$
(ii) $f(-2) = 4 - 2a + 2a - 3 > 0$에서
$1 > 0$이므로 항상 성립한다.
(iii) $f(1) = 1 + a + 2a - 3 > 0$에서
$3a > 2 \quad \therefore\ a > \frac{2}{3}$
(iv) 이차함수 $y = f(x)$의 그래프의 축의 방정식이 $x = -\frac{a}{2}$이므로
$-2 < -\frac{a}{2} < 1$
$\therefore\ -2 < a < 4$
따라서 a의 값의 범위는 $\frac{2}{3} < a \le 2$