1. x에 관한 일차방정식 $x + 1.\dot{9} = 2.\dot{3}$의 해를 구하면?

① $0.\dot{3}$ ② $0.0\dot{3}$ ③ $0.1\dot{3}$ ④ $0.2\dot{3}$ ⑤ $0.3\dot{3}$

해설

$$x = 2.\dot{3} - 1.\dot{9} = \frac{23-2}{9} - \frac{19-1}{9} = \frac{3}{9} = 0.\dot{3}$$

2. $x = 0.\dot{2}$ 일 때, $\dfrac{1}{x} + \dfrac{1}{\dfrac{1}{\dfrac{1}{x}+1}}$ 을 구하여라.

▶ 답 :

▷ 정답 : 10

해설

$$(\text{준식}) = \frac{1}{x} + \frac{1}{\dfrac{1}{\dfrac{1+x}{x}}}$$

$$= \frac{1}{x} + \frac{1}{\dfrac{x}{1+x}} = \frac{1}{x} + \frac{1+x}{x}$$

$$= \frac{1}{x} + \frac{1}{x} + 1$$

$$x = 0.\dot{2} = \frac{2}{9}$$

$$\frac{1}{x} + \frac{1}{x} + 1 = \frac{9}{2} + \frac{9}{2} + 1 = 10$$

3. 한 자리의 자연수 a에 대하여 두 순환소수 $0.0\dot{a}$와 $0.\dot{5}$의 합이 $\frac{3}{5}$일 때, a의 값을 구하여라.

▶ 답:

▷ 정답: 4

해설

$0.0\dot{a} + 0.\dot{5} = \frac{3}{5}$

$\frac{a}{90} + \frac{5}{9} = \frac{3}{5}$, $\frac{a}{90} + \frac{50}{90} = \frac{54}{90}$, $a + 50 = 54$

$\therefore a = 4$

4. 두 순환소수 $0.\dot{a}\dot{b}$, $0.\dot{b}\dot{a}$ 의 합이 $0.\dot{3}$ 일 때, $a-b$ 의 값은? (단, $0<a<b$)

① -2 ② -1 ③ 0 ④ 1 ⑤ 2

해설

$$\frac{10a+b+10b+a}{99}=\frac{11a+11b}{99}=\frac{a+b}{9}$$

$$=0.\dot{3}=\frac{3}{9}$$

$\therefore\ a+b=3$

a, b 가 자연수이고 $0<a<b$ 이므로

$a=1,\ b=2$

$\therefore a-b=-1$

5. 순환소수 $0.\dot{7}-0.1\dot{8}$ 의 차를 $0.\dot{a}b$ 라고 할 때, $0.\dot{b}-0.\dot{a}$ 를 순환소수로 나타내어라.

▶ 답 :

▷ 정답 : $0.\dot{3}$

해설

$$\begin{aligned}0.\dot{7}-0.1\dot{8} &= \frac{7}{9}-\frac{17}{90}\\ &= \frac{53}{90}\\ &= 0.5\dot{8}\end{aligned}$$

$\therefore \quad a=5,\ b=8$

$$\begin{aligned}\therefore \quad 0.\dot{b}-0.\dot{a} &= 0.\dot{8}-0.\dot{5}\\ &= \frac{8}{9}-\frac{5}{9}\\ &= \frac{3}{9}\\ &= 0.\dot{3}\end{aligned}$$

6. $0.\dot{8}+2.\dot{6}$ 을 계산하여 순환소수로 나타내어라.

▶ 답 :

▷ 정답 : $3.\dot{5}$

해설

$$0.\dot{8}+2.\dot{6}=\frac{8}{9}+\frac{24}{9}=\frac{32}{9}=3.\dot{5}$$

7. $\dfrac{50\times 99+478}{990}$ 을 순환소수로 나타내어라.

▶ 답 :

▷ 정답 : $5.48\dot{2}\dot{2}$

해설

$$\frac{50\times 99+478}{990}=\frac{5428}{990}=5.48\dot{2}\dot{2}$$

8. 다음 분수를 순환소수로 나타낸 것은?

$$\frac{40 \times 99 + 131}{990}$$

① $4.08\dot{2}$ ② $4.1\dot{1}\dot{2}$ ③ $4.1\dot{2}\dot{2}$ ④ $4.1\dot{3}\dot{2}$ ⑤ $4.1\dot{5}\dot{2}$

해설

$$\frac{40 \times 99 + 131}{990} = \frac{4091}{990} = 4.1\dot{3}\dot{2}$$

9. 자연수 a, b 에 대하여 $a+b>0$, $ab>0$ 이고 a, b 는 서로소이다. 이러한 조건을 만족시키는 a, b 에 대하여 $\frac{a}{b}=4.\dot{x}=\frac{120}{9y+z}$ 일 때, $x+2y+3z$ 의 값을 구하여라.(단, x, y, z 는 한자리 자연수이다.)

▶ 답 :

▷ 정답 : 35

해설

$\frac{a}{b}=4.\dot{x}=\frac{36+x}{9}$

$\frac{a}{b}=\frac{36+x}{9}=\frac{120}{9y+z}$ 에서 x 가 한 자리의 자연수이므로

$\frac{(36+x)\times 3}{9\times 3}=\frac{108+3x}{27}=\frac{120}{9y+z}$

$108+3x=120$

$\therefore x=4$

$9y+z=27$

$\therefore y=2, z=9$

$x+2y+3z=4+4+27=35$

10. $\frac{15}{13} = x$ 라 할 때 $x \times (10^6 - 1)$ 의 값은 몇 자리 정수인가?

① 4 자리 ② 5 자리 ③ 6 자리

④ 7 자리 ⑤ 8 자리

해설

$$\frac{15}{13} = 1.\dot{1}53846\dot{} = \frac{1153845}{999999}$$

$$x \times (10^6 - 1) = \frac{1153845}{999999} \times 999999 = 1153845$$

11. 어떤 기약분수를 소수로 나타내는데 A 는 분자를 잘못 보고 계산하여 $0.\dot{7}\dot{2}$ 가 되었고 B 는 분모를 잘못 보고 계산하여 $0.78\dot{6}$ 이 되었다. 바르게 고친 답은?

① $5.\dot{3}\dot{2}$ ② $5.\dot{3}\dot{3}$ ③ $5.\dot{3}\dot{4}$ ④ $5.\dot{3}\dot{5}$ ⑤ $5.\dot{3}\dot{6}$

해설

$A : 0.\dot{7}\dot{2} = \frac{72}{99} = \frac{8}{11}$, $B : 0.78\dot{6} = \frac{708}{900} = \frac{59}{75}$

A 는 분모를, B 는 분자를 바르게 보았으므로 기약분수는 $\frac{59}{11}$ 이고, 순환소수로는 $5.\dot{3}\dot{6}$ 이다.

12. 분수 $\frac{584}{99}$ 의 정수 부분을 x, 소수 부분을 y 라 할 때, xy 의 값을 순환소수로 나타내어라.

▶ 답 :

▷ 정답 : $4.\dot{4}\dot{9}$

해설

$$\frac{584}{99} = 5 + \frac{89}{99}$$

$$x = 5,\ y = \frac{89}{99}$$

$$\therefore\ xy = \frac{445}{99} = 4.\dot{4}\dot{9}$$

13. $\frac{15}{37}$ 의 소수 n 번째 자리의 숫자를 x_n 이라 할 때, 다음 계산결과를 자연수로 나타내어라.

$$x_1 + x_2 + 0.\dot{x}_6 + 0.\dot{x}_{58}$$

▶ 답 :

▷ 정답 : 5

해설

$\frac{15}{37} = 0.\dot{4}0\dot{5}$

(준식) $= 4 + 0 + 0.\dot{5} + 0.\dot{4} = 5$

14. $\frac{8}{37}$ 을 소수로 나타낼 때, 소수점 아래 48 번째 자리에 오는 수를 a, 53 번째 자리에 오는 수를 b 라고 할 때, $0.\dot{a}\dot{b} + 0.\dot{b}\dot{a}$ 의 값을 순환소수로 나타내어라.

▶ 답 :

▷ 정답 : $0.\dot{7}$

해설

$\frac{8}{37} = 0.\dot{2}1\dot{6}$

소수 48 번째 자리 : 6 ($\because$ $48 = 3 \times 16$)

소수 53 번째 자리 : 1 ($\because$ $53 = 3 \times 17 + 2$)

$$\begin{aligned} 0.\dot{a}\dot{b} + 0.\dot{b}\dot{a} &= 0.\dot{6}\dot{1} + 0.\dot{1}\dot{6} \\ &= \frac{61}{99} + \frac{16}{99} \\ &= \frac{77}{99} \\ &= \frac{7}{9} = 0.\dot{7} \end{aligned}$$

15. 분수 $\frac{6}{7}$ 을 소수로 나타낼 때, 소수 n 번째 자리의 숫자를 x_n 이라고 한다. x_{103} 의 값을 구하여라.

▶ 답 :

▷ 정답 : 8

해설

$\frac{6}{7} = 0.\dot{8}57142\dot{}$ 이다.

$103 = 6 \times 17 + 1$ 이므로 $x_{103} = 8$

16. 7 의 배수가 아닌 자연수 k 에 대하여 $\frac{k}{7}$ 를 소수로 나타내었을 때, 소수점 아래 n 번째 자리의 숫자를 $f(n)$ 이라 정의한다. 임의의 k $(k \geq 4)$ 에 대하여 $\dfrac{f(k+3)f(2k)}{f(2k+6)f(k-3)}$ 의 값을 구하여라.

▶ 답 :

▷ 정답 : 1

해설

$\frac{4}{7} = 0.\dot{5}71428\dot{}$, $\frac{5}{7} = 0.\dot{7}14285\dot{}$, $\frac{6}{7} = 0.\dot{8}57142\dot{}$, ... 와 같이

7의 배수가 아닌 k에 대하여 $\frac{k}{7}$ 는 소수점 아래 첫째 자리부터 여섯째 자리까지를 순환마디로 하는 순환소수이다.

따라서

$f(k+3) = f(k-3), f(2k) = f(2k+6)$

$\therefore \dfrac{f(k+3)f(2k)}{f(2k+6)f(k-3)} = \dfrac{f(k+3)}{f(k-3)} \times \dfrac{f(2k)}{f(2k+6)} = 1 \times 1 = 1$

17. 분수 $\frac{3}{700}$ 을 소수로 나타내었을 때, x_n 은 소수점 아래 n 번째 수를 나타낸다. 다음 주어진 식의 값은?

$$x_1 + x_3 + x_5 + x_7 + x_9 + \cdots + x_{25}$$

① 72 ② 74 ③ 76 ④ 78 ⑤ 80

해설

$\frac{3}{700} = 0.00\dot{4}28571\dot{}$

$x_1 = 0,\ x_3 = 4,\ x_5 = 8,\ x_7 = 7,\ \cdots$

$\therefore$ (준식) $= 4 \times (4 + 8 + 7) = 76$

18. $\frac{4}{27}$ 를 소수로 나타내었을 때, x_n 은 소수점 아래 n 번째 수를 나타낸다. 다음 값을 구하여라.

$$x_1 + x_3 + x_5 + x_7 + x_9 + \cdots + x_{41}$$

▶ 답 :

▷ 정답 : 91

해설

$\frac{4}{27} = 0.\dot{1}4\dot{8},\ x_1 = 1,\ x_3 = 8,\ x_5 = 4, \cdots x_7 = 1, \cdots$

$\therefore$ (준식) $= 7 \times (1 + 8 + 4) = 91$

19. $\dfrac{1}{1-\dfrac{1}{1+\dfrac{1}{x}}} = 1.\dot{4}\dot{5}$ 일 때, x 를 순환소수로 나타내어라.

▶ 답 :

▷ 정답 : $0.\dot{4}\dot{5}$

해설

$1+\dfrac{1}{x}=\dfrac{x+1}{x}$ 이므로 위의 식의 분모를 정리하면

$1-\dfrac{1}{1+\dfrac{1}{x}}=1-\dfrac{1}{\dfrac{x+1}{x}}=1-\dfrac{x}{x+1}=\dfrac{1}{x+1}$ 이다.

$(\text{준식})=\dfrac{1}{\dfrac{1}{x+1}}=x+1=1.\dot{4}\dot{5}$

$\therefore\ x=1.\dot{4}\dot{5}-1=0.\dot{4}\dot{5}$

20. $x = \frac{5}{13}$ 일 때, $10^6 x - x$의 값을 구하여라.

▶ 답 :

▷ 정답 : 384615

해설

$x = \frac{5}{13} = 0.384615384615\cdots$ 이고

$10^6 x = 384615.384615\cdots$ 이므로

$10^6 x - x = 384615$ 이다.

21. 다음 식을 만족하는 x 의 값을 구하면?

$$\frac{1}{1-\dfrac{1}{1-\dfrac{1}{x}}} = 0.\dot{1}$$

① $0.\dot{5}$ ② $0.\dot{6}$ ③ $0.\dot{7}$ ④ $0.\dot{8}$ ⑤ $0.\dot{9}$

해설

$$\frac{1}{1-\dfrac{1}{1-\dfrac{1}{x}}} = \frac{1}{1-\dfrac{1}{\dfrac{x-1}{x}}}$$

$$= \frac{1}{1-\dfrac{x}{x-1}}$$

$$= \frac{1}{\dfrac{x-1}{x-1}-\dfrac{x}{x-1}}$$

$$= \frac{1}{\dfrac{-1}{x-1}} = -x+1$$

$$-x+1 = 0.\dot{1}$$

$$\therefore\ x = 1-0.\dot{1}$$

$$= 1-\frac{1}{9}$$

$$= \frac{8}{9}$$

$$= 0.\dot{8}$$

22. $x = 0.\dot{5}$ 일 때 다음 식을 계산한 결과를 순환소수로 나타내어라.

$$1 - \cfrac{1}{1 - \cfrac{1}{1 - \cfrac{1}{1 - x}}}$$

▶ 답 :

▷ 정답 : $0.\dot{4}$

해설

$$1 - \cfrac{1}{1 - \cfrac{1}{1 - \cfrac{1}{1 - \cfrac{5}{9}}}} = 1 - \cfrac{1}{1 - \cfrac{1}{1 - \cfrac{1}{\cfrac{4}{9}}}} = 1 - \cfrac{1}{1 - \cfrac{1}{1 - \cfrac{9}{4}}} = 1 - \cfrac{1}{1 - \cfrac{-4}{5}} = 1 - \cfrac{1}{\cfrac{9}{5}} = 1 - \frac{5}{9} = \frac{4}{9}$$ 따라서 주어진 식을 계산한 결과를 순환소수로 나타내면 $0.\dot{4}$ 이다.

23. $x = 0.\dot{2}4\dot{7}$ 일 때, $x \times (10^3 - 1)$ 은 몇 자리 정수인가?

▶ 답 :

▷ 정답 : 세 자리 정수

해설

$$x = 0.\dot{2}4\dot{7} = \frac{247}{999}$$

$$x \times (10^3 - 1) = \frac{247}{999} \times 999 = 247$$

24. 다음 식을 만족하는 순환소수 x 의 순환마디의 각 자릿수의 합을 구하여라.

$$1-\cfrac{1}{1+\cfrac{1}{1+\cfrac{1}{x}}}=0.\dot{4}0\dot{5}$$

▶ 답:

▷ 정답: 27

해설

$$(\text{우변})=0.\dot{4}0\dot{5}=\frac{405}{999}=\frac{45}{111}$$

$$(\text{좌변})=1-\cfrac{1}{1+\cfrac{1}{1+\cfrac{1}{x}}}$$

$$=1-\cfrac{1}{1+\cfrac{x}{x+1}}=1-\frac{x+1}{2x+1}$$

$$=\frac{x}{2x+1}$$

$\frac{x}{2x+1}=\frac{45}{111}$ 이므로

$111x=90x+45$

$21x=45$

$\therefore x=\frac{45}{21}=\frac{15}{7}=2.\dot{1}42857$

따라서 순환마디의 각 자릿수의 합은

$1+4+2+8+5+7=27$ 이다.

25. 두 분수 $\frac{7}{176}, \frac{11}{140}$ 에 어떤 세 자리 자연수 A 을 곱한 값은 모두 유한소수가 된다. 이것을 만족하는 A 의 개수를 구하여라.

▶ 답 : 개

▷ 정답 : 11 개

해설

$\frac{7}{176} \times A = \frac{7 \times A}{2^4 \times 11}, \frac{11}{140} \times A = \frac{11 \times A}{2^2 \times 5 \times 7}$

이 두 수가 두 유한소수가 되려면 분모에 2 나 5 이외의 소인수가 없어야 하므로 A 는 7 과 11 의 공배수, 즉 77 의 배수가 되어야 한다.

77 의 배수 중 세 자리 자연수는

$77 \times 2 = 154, 77 \times 3 = 231, \cdots, 77 \times 12 = 924$ 이므로 구하는 수의 개수는 $12 - 1 = 11$ (개)

26. 자연수 x 에 대하여 $\frac{7x}{60}$ 은 유한소수이고, $7x \leq 100$ 이다. 이것을 만족하는 x 들의 합을 구하여라.

▶ 답 :

▷ 정답 : 30

해설

$\frac{7x}{60} = \frac{7x}{2^2 \times 3 \times 5}$ 이므로 x 는 3 의 배수이어야 한다.
분자인 $7x$ 는 100 이하의 자연수이므로
조건에 맞는 x 값은 3, 6, 9, 12 이다.
따라서 x 값들의 합은 30 이다.

27. 자연수 n에 대하여 $\frac{n}{42}$을 유한소수로 나타낼 수 없을 때, 이 중 100 번째로 작은 수를 기약분수로 나타내어라.

▶ 답 :

▷ 정답 : $\frac{52}{21}$

해설

$\frac{n}{42} = \frac{n}{2 \times 3 \times 7}$ 이므로 분모가 42 이고, 분자가 자연수인 분수 중에서 유한소수가 아닌 수는 분자가 21 의 배수가 아닌 수이다.
1 에서 104 까지의 자연수 중 21 의 배수는 4 개 이므로 21 의 배수가 아닌 수는 $104 - 4 = 100$ (개)
즉, 분자가 104 인 분수가 100 번째 유한소수가 아닌 수이므로 $\frac{104}{42} = \frac{52}{21}$ 이다.

28. 분수 $\frac{7}{2^4 \times x}$ 은 유한소수이다. 두 자리 자연수 x 의 최댓값을 구하여라.

▶ 답 :

▷ 정답 : 80

해설

x 는 $2^a \times 5^b$ 또는 $2^a \times 5^b \times 7$ 의 꼴이다.

$x = 2^a \times 5^b$ 의 꼴일 경우

	2^0	2^1	2^2	2^3	2^4	2^5	2^6
5^0	1	2	4	8	16	32	64
5^1	5	10	20	40	80		
5^2	25	50					

$x = 2^a \times 5^b \times 7$ 의 꼴일 경우

	2^0	2^1	2^2	2^3	2^4	2^5	2^6
5^0	7	14	28	56			
5^1	35	70					
5^2							

따라서 가장 큰 두 자리의 자연수는 80 이다.

29. 분수 $\frac{7a}{130}$ 를 소수로 나타내면 유한소수이고 이 분수를 기약분수로 나타내면 분자는 4 의 배수가 된다고 한다. 이 때, 자연수 a 의 최솟값을 구하여라.

▶ 답 :

▷ 정답 : 104

해설

$\frac{7a}{130} = \frac{7a}{2 \times 5 \times 13}$ 이므로 유한소수가 되기 위해서는 a 가 13 의 배수가 되어야 한다.

또한 분모에 소인수 2를 가지고 있으므로 기약분수로 만들었을 때, 분자가 4의 배수가 되려면 13과 8을 인수로 가지고 있어야 한다.

따라서 a 는 8과 13 의 공배수 이어야 한다.

따라서 자연수 a 의 최솟값은 8과 13 의 최소공배수이다.

$\therefore\ 8 \times 13 = 104$

30. $x * y$ 를 $\begin{cases} x = y\text{이면 } 1 \\ x \neq y\text{이면 } -1 \end{cases}$ 이고, $a = 0.3$, $b = 0.\dot{3}$, $c = \frac{10}{33}$, $d = 0.2\dot{9}$, $e = \frac{1}{3}$ 일 때, 다음의 값을 구하여라.

$(b * c) * (a * d) * (b * e)$

▶ 답 :

▷ 정답 : -1

해설

$a = \frac{3}{10}$, $b = \frac{3}{9}$, $c = \frac{30}{99}$, $d = \frac{3}{10}$, $e = \frac{3}{9}$ 이므로

(준식) $= (-1) * 1 * 1 = (-1) * 1 = -1$

31. 정수, 자연수, 유한소수, 무한소수, 순환소수에 대하여, 다음 중 옳은 것을 모두 골라라.

㉠ 정수와 무한소수의 합은 무한소수이다.
㉡ 자연수와 순환소수의 곱은 순환소수이다.
㉢ 무한소수와 순환소수의 합은 순환소수이다.
㉣ 자연수와 유한소수의 합은 순환소수이다.
㉤ 유한소수와 무한소수의 합은 유한소수이다.

▶ 답:

▶ 답:

▷ 정답: ㉠

▷ 정답: ㉡

해설

㉢무한소수와 순환소수의 합은 무한소수이다.
무한소수에는 순환하지 않는 무한소수도 있다.
㉣ 자연수와 유한소수의 합은 유한소수이다.
㉤ 유한소수와 무한소수의 합은 무한소수이다.
무한소수에는 순환하지 않는 무한소수도 있다.

32. 두수 $x,\ y$ 에 대하여 $x * y$ 를

$x = y$이면 $1,\ x \neq y$이면 -1

라 한다. 네 수 $a = 0.1,\ b = \frac{1}{9},\ c = 0.\dot{1},\ d = \frac{1}{33},\ e = 0.0\dot{9}$ 에 대하여 $(a * e) * (b * c) * (a * d)$ 의 값을 구하여라.

▶ 답 :

▷ 정답 : -1

해설

$a = \frac{1}{10},\ b = \frac{1}{9},\ c = \frac{1}{9},\ d = \frac{1}{33},\ e = \frac{1}{10}$ 이므로

(준식) $= 1 * 1 * (-1) = 1 * (-1) = -1$