1. $f\ :\ X \rightarrow Y$ 가 상수함수이고, $f(100)=100$ 일 때, $f(2006)=a$ 이다. $a+100$ 의 값은?

① 0 ② 100 ③ 200 ④ 300 ⑤ 400

해설

상수함수에 정의에 의해 $f(x)=100$

$\therefore\ f(2006)=100=a$

따라서 $a+100=200$

2. 두 집합 $X = \{-1,\ 0,\ 1\}$, $Y = \{-2,\ \ -1,\ 0,\ 1,\ 2\}$가 있다. 함수 $f : X \to Y$ 가 임의의 $x \in X$ 에 대하여 $xf(x)$ 가 상수가 될 때, 이를 만족시키는 함수 f 의 개수는 몇 개인가?

① 3 개　　② 5 개　　③ 7 개　　④ 9 개　　⑤ 11 개

해설

임의의 $x \in X$ 에 대하여 $xf(x) = k$
(단, k 는 상수)를 만족시킨다고 하면
$x = -1$ 일 때, $-f(-1) = k$
$x = 0$ 일 때, $0 \cdot f(0) = k$
$\therefore\ \ k = 0$
$x = 1$ 일 때, $f(1) = k$ 에서
$f(-1) = f(1) = 0$ 임을 알 수 있다.
따라서, 집합 X 에서 Y 로의 함수 중
임의의 $x \in X$ 에 대하여 $xf(x)$ 가
상수가 되려면 -1 이 대응할 수 있는
원소 0 의 1 가지 0 이 대응할 수 있는 원소는
$-2,\ \ -1,\ 0,\ 1,\ 2$ 의 5 가지
1 이 대응할 수 있는 원소는 0 의 1 가지
$\therefore\ \ 1 \times 5 \times 1 = 5$ (개)

3. 두 함수 $f(x)$, $g(x)$를

$$f(x)\begin{cases} x^2 \ (x\text{가 유리수일때}) \\ x^4 \ (x\text{가 무리수일때}) \end{cases} \qquad g(x) = \sqrt{x}$$ 로 정의할 때, $(f \circ f \circ f \circ g \circ g \circ g)(2)$ 의 값은?

① 2 ② 4 ③ 8 ④ 16 ⑤ 32

해설

$$\begin{aligned} f(f(f(g(g(g(2)))))) &= f(f(f(g(g(\sqrt{2}))))) \\ &= f(f(f(g(\sqrt{\sqrt{2}})))) \\ &= f(f(f(\sqrt{\sqrt{\sqrt{2}}}))) \\ &= f(f(\sqrt{2})) = f(4) = 16 \end{aligned}$$

4. 실수 전체의 집합 R 에서 R 로의 함수 $f(x) = ax + b|x|$ (a, b는 상수)가 역함수를 가질 조건은?

① $a^2 - b^2 < 0$ ② $a^2 - b^2 > 0$ ③ $a + b > 0$

④ $a - b > 0$ ⑤ $a - b < 0$

해설

$$f(x) = \begin{cases} (a+b)x & (x \geq 0) \\ (a-b)x & (x < 0) \end{cases}$$

함수$f(x)$ 가 역함수를 가지려면
$f(x)$ 가 증가함수이거나 감소함수이어야 하므로
두 직선 $y = (a+b)x, y = (a-b)x$ 의 기울기의 부호가 같아야 한다.

$\therefore (a+b)(a-b) > 0, \quad a^2 - b^2 > 0$

5. 두 함수 $f(x) = x + a,\ g(x) = bx + c$ 에 대하여 $(f \circ g)(x) = 2x - 1,\ g^{-1}(1) = 2$ 이 성립할 때, 상수 a, b, c 의 합을 구하면?

① -2 ② -1 ③ 0 ④ 1 ⑤ 2

해설

$g^{-1}(1) = 2$ 에서 $g(2) = 1$

$g(2) = 2b + c = 1 \cdots$ ㉠

$(f \circ g)(x) = f(g(x)) = g(x) + a = bx + c + a$

$= 2x - 1$ 이고

모든 x 에 대하여 성립해야 하므로

$b = 2 \cdots$ ㉡

$c + a = -1 \cdots$ ㉢

㉠, ㉡, ㉢을 연립으로 풀면

$a = 2$, $b = 2$, $c = -3$

$\therefore\ a + b + c = 2 + 2 + (-3) = 1$

6. 두 함수 $f(x) = 2x - 5$, $g(x) = -6x + 2$ 에 대하여 $(k \circ f)(x) = g(x)$ 를 만족하는 함수 $k(x)$ 를 구하면?

① $-3x + 17$ ② $-3x - 13$ ③ $-3x + 13$

④ $-3x$ ⑤ $-5x + 10$

해설

$(k \circ f)(x) = g(x)$

$(k \circ f \circ f^{-1})(x) = (g \circ f^{-1})(x)$

$k(x) = (g \circ f^{-1})(x)$

$f(x) = 2x - 5$

$\therefore\ y = 2x - 5$

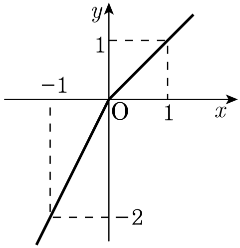
$\dfrac{y+5}{2} = x,\ x = \dfrac{y}{2} + \dfrac{5}{2}$

$\therefore\ y = \dfrac{x}{2} + \dfrac{5}{2}$

$\therefore\ f^{-1}(x) = \dfrac{x}{2} + \dfrac{5}{2}$

$\therefore\ (g \circ f^{-1})(x) = -6\left(\dfrac{x}{2} + \dfrac{5}{2}\right) + 2 = -3x - 13$

7. 함수 $y=f(x)$ 의 그래프는 아래 그림과 같이 원점과 두 점 $(1,1),(-1,-2)$ 를 각각 지나는 두 반직선으로 이루어져 있다. 이 때, [보기] 중 옳은 것을 모두 고른 것은 무엇인가?



보기

㉠ $f(10)=f(f(10))$

㉡ $f^{-1}(-2)=-1$

㉢ $y=f(x)$ 의 그래프와 $f(x)$ 의 역함수 $y=f^{-1}(x)$ 의 그래프의 교점은 두 개뿐이다.

① ㉠ ② ㉢ ③ ㉠,㉡

④ ㉡,㉢ ⑤ ㉠,㉡,㉢

해설

㉠ $f(10)=10$

$f(f(10))=f(10)=10$

$\therefore f(10)=f(f(10))$ (참)

㉡ $f(-1)=-2 \Leftrightarrow f^{-1}(-2)=-1$ (참)

㉢ $y=f^{-}1(x)$의 그래프는 $y=f(x)$ 의 그래프를 $y=x$에 대하여 대칭이동시킨 그래프이다.

따라서 $y=f(x)$ 와 $y=f^{-1}(x)$ 는 무수히 많은 점에서 만난다. (거짓)

따라서 옳은 것은 ㉠, ㉡ 이다.

8. 무리수 $\sqrt{3-2\sqrt{2}}$의 정수 부분을 a, 소수 부분을 b라 하면 $\frac{a}{2}-2b$의 값은?

① $2(1-\sqrt{2})$　② $-2(1-\sqrt{2})$　③ $2(1+\sqrt{2})$

④ $3-2\sqrt{2}$　⑤ $3+2\sqrt{2}$

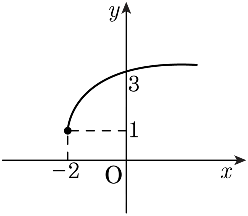
해설

$$\sqrt{3-2\sqrt{2}}=\sqrt{(\sqrt{2}-1)^2}=\sqrt{2}-1=0.\cdots$$

정수 부분 a : 0, 소수 부분 b : $\sqrt{2}-1$

$$\therefore \frac{a}{2}-2b=-2(\sqrt{2}-1)=2-2\sqrt{2}=2(1-\sqrt{2})$$

9. 무리함수 $y=\sqrt{ax+b}+c$의 그래프가 다음 그림과 같을 때, $a+b+c$의 값을 구하여라.



▶ 답 :

▷ 정답 : 7

해설

주어진 그래프는 $y=\sqrt{ax}$ 의 그래프를 x 축으로 -2 만큼, y 축으로 1만큼 평행이동한 것과 같으므로 $y=\sqrt{a(x+2)}+1$

또, 점 $(0,\ 3)$ 을 지나므로

$3=\sqrt{2a}+1,\ \ \sqrt{2a}=2$

$\therefore\ \ a=2$

따라서 $y=\sqrt{2(x+2)}+1=\sqrt{2x+4}+1$ 이고,

이것이 $y=\sqrt{ax+b}+c$ 와 일치하므로

$a=2,\ b=4,\ c=1$

$\therefore\ \ a+b+c=7$

10. $-\frac{1}{3} \leq x \leq \frac{8}{3}$ 에서 함수 $y = \sqrt{3x+a}+2$ 의 최댓값이 b , 최솟값이 2 일 때, $a+b$ 의 값을 구하여라.

▶ 답 :

▷ 정답 : 6

해설

$$y = \sqrt{3x+a}+2 = \sqrt{3\left(x+\frac{a}{3}\right)}+2$$

주어진 함수의 그래프는 $y = \sqrt{3x}$ 의 그래프를 x 축의 방향으로 $-\frac{a}{3}$ 만큼, y 축의 방향으로 2 만큼 평행이동한 것이므로 x 의 값이 증가할 때, y 의 값도 증가한다.

i) $x = -\frac{1}{3}$ 일 때 최솟값을 가지므로

$$2 = \sqrt{3\cdot\left(-\frac{1}{3}\right)+a}+2 \quad \therefore\ a = 1$$

ii) $x = \frac{8}{3}$ 일 때 최댓값을 가지므로

$$b = \sqrt{3\cdot\frac{8}{3}+1}+2 = 5$$

i), ii) 에서 $a+b = 1+5 = 6$

11. $y = \sqrt{2x+1}$ 의 역함수를 $y = g(x)$ 라 하면, $g(-3)$ 의 값은?

① 4 ② $\sqrt{-5}$ ③ -5 ④ 없다 ⑤ -3

해설

역함수가 존재하려면 일대일 대응이 되어야 한다.
$y = \sqrt{2x+1}$ 의 역함수 $y = g(x)$ 의 정의역은
$y = \sqrt{2x+1}$ 의 치역이 되어야 하는데
이 함수의 치역은 음수가 될 수 없으므로
$g(-3)$ 의 값은 존재하지 않는다.

12. 1부터 72까지의 자연수 중에서 72와 서로소인 수의 개수를 구하여라.

▶ 답 : ______ 개

▷ 정답 : 24 개

해설

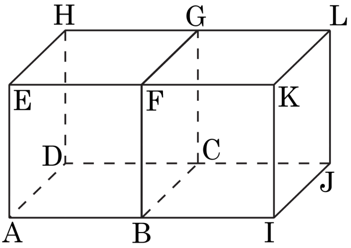
$72 = 2^3 \times 3^2$

72와 서로소는 2의 배수도 아니고, 3의 배수도 아닌 것

$\therefore\ 72 - (36 + 24 - 12) = 24$

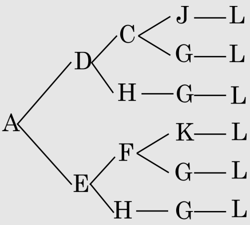
$\therefore$ 24개

13. 두 개의 정육면체가 서로 붙어 있는 아래 그림에서 A 에서부터 L 까지 모서리를 따라 최단 거리로 가는 방법 중 B 를 통과하지 않는 방법의 수를 구하면?



① 4　　② 6　　③ 8　　④ 12　　⑤ 16

해설



위의 수형도에서 구하는 방법의 수는 6가지이다.

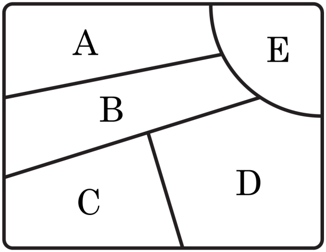
14. 100 원짜리, 50 원짜리, 10 원짜리 세 종류의 동전으로 200 원을 지불할 수 있는 경우의 수는 몇 가지인가? (모든 종류의 동전을 사용할 필요는 없다.)

① 6 ② 7 ③ 8 ④ 9 ⑤ 10

해설

(100 원짜리, 50 원짜리, 10 원짜리) 각각의 순서쌍을 구하면
$(2,0,0)$, $(1,2,0)$, $(1,1,5)$, $(1,0,10)$, $(0,4,0)$, $(0,3,5)$, $(0,2,10)$, $(0,1,15)$, $(0,0,20)$
$\therefore$ 9 가지

15. 다음 그림과 같은 사각형 안에 빨강, 주황, 노랑, 초록, 파랑의 다섯 가지 색을 이웃하는 면에만 서로 다른 색으로 칠할 때, 칠할 수 있는 모든 경우의 수는?



① 120가지 ② 240가지 ③ 360가지

④ 480가지 ⑤ 540가지

해설

서로 같은 색을 칠할 수 있는 순서쌍은 A – C, A – D, C – E가 있다.

5가지 색을 사용하는 경우 : $5\times4\times3\times2\times1=120$ (가지)

4가지 색을 사용하는 경우 : $3\times(5\times4\times3\times2)=360$ (가지)

3가지 색을 사용하는 경우 : $5\times4\times3=60$ (가지)

$\therefore\ 120+360+60=540$ (가지)

16. $1, 2, 3, 4$ 를 일렬로 배열할 때, i 번째 오는 숫자를 a_i $(1 \le i \le 4)$라고 하면 $(a_1 - 1)(a_2 - 2)(a_3 - 3)(a_4 - 4) \neq 0$ 인 경우의 수를 구하여라.

▶ **답 :** ______ 가지

▷ **정답 :** 9 가지

해설

가능한 답을 순서쌍 (a_1, a_2, a_3, a_4) 으로 나타내어 보면 다음과 같다.

$(2, 1, 4, 3)$, $(2, 3, 4, 1)$, $(2, 4, 1, 3)$,
$(3, 1, 4, 2)$, $(3, 4, 1, 2)$, $(3, 4, 2, 1)$,
$(4, 1, 2, 3)$, $(4, 3, 1, 2)$, $(4, 3, 2, 1)$

$\therefore$ 9 가지

17. A, B, C, D 4 명을 일렬로 세울 때, B 와 C 가 이웃하여 서는 경우의 수를 구하여라.

▶ **답 :** ________ 가지

▷ **정답 :** 12 가지

해설

B 와 C 를 하나로 보면, 세명을 일렬로 세우는 경우와 같다.

$\Rightarrow 3! = 6$

여기에 B 와 C 가 자리를 바꾸는 방법을 곱해준다.

$\therefore\ 6 \times 2 = 12$

18. 다음 등식을 만족시키는 n의 값을 구하여라.

$_nP_2 + 4_nC_2 = 60$

▶ 답 :

▷ 정답 : $n = 5$

해설

$_nP_2 = n(n-1)$, $_nC_2 = \dfrac{n(n-1)}{2 \cdot 1}$ 이므로

조건식은 $n(n-1) + 2n(n-1) = 60$

$\therefore (n+4)(n-5) = 0$

$n \geq 2$ 이므로 $n - 5 = 0$

$\therefore n = 5$

19. 서로 다른 5 개의 풍선과 3 개의 깃발이 있다. 이 중에서 3 개의 풍선과 2 개의 깃발을 일렬로 배열하여 신호를 보내려고 할 때, 그 방법의 수는?

① 1200 가지　② 1800 가지　③ 2400 가지
④ 3000 가지　⑤ 3600 가지

해설

(i) 5 개의 풍선에서 3 개의 풍선을 택하는 방법의 수는 ${}_5C_3$

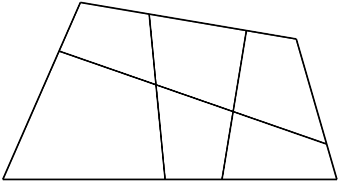
(ii) 3 개의 깃발에서 2 개의 깃발을 택하는 방법의 수는 ${}_3C_2$

(iii) 5 개를 일렬로 배열하는 방법의 수는 5!

따라서 구하는 방법의 수는

${}_5C_3 \times {}_3C_2 \times 5! = 3600$ (가지)

20. 아래 그림과 같이 가로로 3개의 선분과 세로로 4개의 선분이 만나고 있다. 만들 수 있는 사각형의 개수를 구하여라.



▶ 답 : ______ 개

▷ 정답 : 18 개

해설

3개의 가로선 중 2개를 택하고, 4개의 세로선 중 2개를 택하면 사각형이 결정된다.
따라서 구하는 사각형의 개수는
${}_3C_2 \times {}_4C_2 = 3 \times 6 = 18$

21. 함수 $f(x)=\begin{cases} x^2-2x+1 & (x \geq 1) \\ -\sqrt{1-x} & (x<1) \end{cases}$ 에 대하여 $f(x)$ 의 역함수가 존재할 때, $(f^{-1} \circ f^{-1})(x)=1$ 일 때, x 의 값을 구하면? (단, $f^{-1}(x)$ 은 $f(x)$ 의 역함수)

① -2 ② -1 ③ 0 ④ 1 ⑤ 2

해설

$f(x)=\begin{cases} x^2-2x+1 & (x \geq 1) \\ -\sqrt{1-x} & (x<1) \end{cases}$ 에서

$(f^{-1} \circ f^{-1})(x)=(f \circ f)^{-1}(x)=1$

$(f \circ f)(1)=(f(f(1))=f(0)=-1$

$\therefore\ x=-1$

22. $a+b \le 100$ 이고 $\dfrac{a+b^{-1}}{a^{-1}+b} = 13$ 을 만족하는 양의 정수 쌍 $(a,\ b)$ 의 개수는?

① 1 개　　② 5 개　　③ 7 개　　④ 9 개　　⑤ 13 개

해설

$$\frac{a+b^{-1}}{a^{-1}+b} = 13$$

분모, 분자에 ab 를 곱하면

$$\frac{a^2b+a}{b+ab^2} = \frac{a(ab+1)}{b(1+ab)} = \frac{a}{b} = 13$$

$\therefore\ a = 13b$

$a+b \le 100$ 에 대입하면

$$14b \le 100,\ 0 < b \le \frac{100}{14} < 8$$

따라서 $b = 1,\ 2,\ 3,\ 4,\ 5,\ 6,\ 7$ 이므로

$(a,\ b)$ 의 개수는 7 개

23. $0 \le x \le 1$일 때, 함수 $y = \dfrac{x+2}{x+1}$의 최댓값을 M, 최솟값을 m이라 한다. Mm의 값은?

① 1 ② 2 ③ 3 ④ 4 ⑤ 5

해설

$$y = \frac{x+2}{x+1} = \frac{1}{x+1} + 1$$

$x = 0$일 때 최대이므로, $M = \dfrac{1}{0+1} + 1 = 2$

$x = 1$일 때 최소이므로, $m = \dfrac{1}{1+1} + 1 = \dfrac{3}{2}$

$\therefore \quad Mm = 2 \times \dfrac{3}{2} = 3$

24. 국어책 2권, 영어책 2권, 수학책 3권을 책꽂이에 일렬로 꽂을 때, 수학책끼리 이웃하지 않도록 꽂는 방법의 수는?

① 512 ② 700 ③ 816 ④ 1024 ⑤ 1440

해설

국어책, 영어책을 먼저 배열하고 그 사이 사이에 수학책 3 권을 배열하는 경우와 같다.

$\Rightarrow 4! \times {}_5P_3 = 1440$

25. 남학생 3명, 여학생 3명을 일렬로 세울 때, 여학생 3명 중 적어도 2명이 이웃하게 서는 방법의 수는?

① 144 ② 240 ③ 432 ④ 576 ⑤ 720

해설

6명을 일렬로 세우는 방법의 수는 $6! = 720$
여학생 3명이 이웃하지 않게 서는 방법의 수는 남학생 3명을 세우고, 남학생 3명 사이 및 양끝 4개의 자리에 여학생 3명을 세우는 방법의 수와 같으므로 $3! \times 4! = 144$
따라서 구하는 방법의 수는 $720 - 144 = 576$